INSTITUTO TECNOLOGICO DE SAN ANDRES TUXTLA

DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO

ASIGNATURA: ALGEBRA LINEAL

ALUMNAS:

BELLI ARRES MADAI CONCEPCION

CHAPOL PONCIANO ROSA ISELA

LLANOS CHIPOL FRIDA SOFIA

MENDOZA MARTINEZ JOSSELIN

CAMPOS GABINO RODRIGO

MERLIN GARCIA VICTOR MANUEL

CARRERA: INGENIERIA INDUSTRIAL

4.5 Espacio vectorial con producto interno y sus propiedades.

Producto Interno:

- Un producto interno sobre un espacio vectorial V es una operación que asigna a cada par de vectores u y v en V un número real <u, v>.
- Un producto interior sobre V es una función que asocia un número real ‹u, v› con cada par de vectores u y v cumple los siguientes axiomas:
- **Propiedades:**

- i. (v, v) ≥ 0
- ii. (v, v) = 0 si y sólo si v = 0.
- iii, (u, v +w) = (u, v)+ (u, w)
- iv. (u + v, w) = (u, w)+(v, w)
- v. (u, v) = (v, u)
- vi. (αu, v) = α(u, v)
- vii. (u, αv) = α(u, v)

Espacios con producto interior

- El producto interior euclidiano es solo uno más de los productos internos que se tiene que definir en Rn Para distinguir entre el producto interno normal y otros posibles productos internos se usa la siguiente notación.
- u ●v = producto punto (producto interior euclidiano para Rn)
- ‹u, v› = producto interno general para espacio vectorial V.

Propiedades de los productos interiores

- 1. ‹0, v› = ‹v, 0› = 0
- 2. ‹u + v, w› = ‹u, w› + ‹v, w›
- 3. ‹u, cv› = c‹u, v›.

Definición (producto interno en un espacio vectorial real). Sea V un espacio vectorial real. Una función $p: V \times V \to R$ se denomina producto interno en V si cumple con las siguientes propiedades: i) p es lineal respecto al primer argumento:

$$p(u + v, w) = p(u, w) + p(v, w)$$
$$p(\lambda u, v) = \lambda p(u, v)$$

Linealidad respecto al otro argumento. Sea V un espacio vectorial real y sea p una función lineal respecto al primer argumento y simétrica. Entonces p es lineal respecto al segundo argumento:

$$p(u + v, w) = p(u, w) + p(v, w)$$
$$p(\lambda u, v) = \lambda p(u, v)$$

Notación común para el producto interno. En cualquier espacio vectorial real o complejo, excepto el espacio nulo {0}, existen muchos productos internos. Si un espacio vectorial se considera con un producto interno fijo, entonces este producto interno se denota habitualmente por h·, ·i, es decir, en lugar de p(u, v) se escribe hu, vi.

Ejemplo . Sea Φ : R 2 × R 2 → R definida por:

$$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + \alpha . x_2 y_2$$

Hallar todos los valores de α ∈ R para los cuales Φ es un producto interno. Es inmediato verificar que, para cualquier α ∈ R se cumplen las condiciones i) y ii) de la definición de producto interno. Veamos para que valores de α se cumple la condición iii). Se tiene que

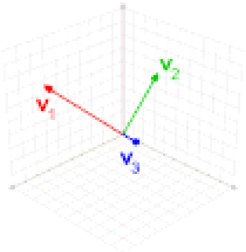
$$\begin{aligned} \Phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + \alpha x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + (\alpha - 1)x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (\alpha - 1)x_2^2 \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce que Φ(v, v) > 0 ∀ v 6= 0 ⇐⇒ α > 1. En consecuencia, Φ es un producto interno si y solo si α > 1.

4.6 Base ortonormal, proceso de Orto normalización de Gram_Schmidt.

- El proceso de orto normalización de Gram–Schmidt es un algoritmo para construir, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio prehilbertiano (usualmente, el espacio euclídeo Rn), otro conjunto ortonormal de vectores que genere el mismo subespacio vectorial.

- El proceso se basa en un resultado de la geometría euclídea, el cual establece que la diferencia entre un vector y su proyección sobre otro, es perpendicular al primero. Dicho resultado constituye una herramienta para construir, a partir de un conjunto de dos vectores no paralelos, otro conjunto, conformado por dos vectores perpendiculares.
- Este algoritmo recibe su nombre de los matemáticos Jørgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt.



Descripción del Algoritmo de Orto normalización de Gram-Schmidt

En el espacio euclídeo R´3 con el producto escalar usual definido, se propone un método para encontrar un sistema de vectores, perpendiculares entre sí, a partir de tres vectores no coplanarios cualesquiera. Sean V1, V2, V3 E R´3 dichos vectores.

El método consiste de dos proyecciones. La base ortogonal de R`3 compuesta por U1, U2, U3 , se calcula de la siguiente manera.

1. Se escoge arbitrariamente uno de los vectores dados, por ejemplo, U1 = V1.
2. U2 se calcula como la diferencia entre V2 y el vector que resulta de proyectar a V2 sobre U1. Dicha diferencia es perpendicular a U1. Es equivalente afirmar que U2 es la diferencia entre V2 y el vector que resulta de proyectar a V2 sobre la recta que genera U1.
3. U3 es la diferencia entre V3 y el vector que resulta de proyectar a V3 sobre el plano generado por U1 y U2. La diferencia de vectores tiene como resultado otro vector que es perpendicular al plano.

Esta sencilla interpretación del algoritmo para un caso que puede verse es susceptible de generalización a espacios vectoriales de dimensión arbitraria, con productos internos definidos, no necesariamente canónicos. Dicha generalización no es otra que el proceso de Gram-Schmidt.

El método para orto normalizar un conjunto de vectores lo describimos a continuación

Proceso de orto normalización de Gram-Schmidt
Consideremos un conjunto de vectores S={v1,v2...vn} linealmente independientes de un espacio vectorial V.

P.1) Elección del primer vector unitario. Tomamos el vector v1 y lo dividimos entre su magnitud para hacerlo unitario; al resultado lo llamaremos u1, es decir, $u1=v1|v1|$.
P.2) Elección del segundo vector unitario. Proyectamos el vector v2 sobre u1, para obtener

$v'2=v2-v2\cdot u1|u1|2u1=v2-(v2\cdot u1)u1$ esto último se debe a que $|u1|=1$.
Tomamos el vector v'2 y lo dividimos entre su magnitud para hacerlo unitario, al resultado lo llamaremos u2, es decir $u2=v'2|v'2|$.

P.3) Elección del k+1 vector unitario. Supongamos que se han construido los vectores {u1,u2...uk} y que forman un conjunto ortonormal. Para construir uk+1 tenemos
$v'k+1=vk+1-(vk+1\cdot u1)u1-(vk+1\cdot u2)$

Finalmente $uk+1=\{v'k+1||v'k+1||\}$. Decimos que es un conjunto ortonormal y se puede continuar de esta manera hasta que k+1=m con lo que se completa la prueba.

LISTA DE COTEJO PARA INVESTIGACION DOCUMENTAL

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno: ROSA ISELA CHAPOL			
GRUPO:	301A	CARRERA:	ING. INDUSTRIAL

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		NOMBRE DEL CURSO: ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO		FIRMA DEL DOCENTE
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO: ESPACIOS VECTORIALES	FECHA: 9/12/22	PERIODO ESCOLAR: AG2022-ENERO 2023
INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN		
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	
0.4%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación	X		
0.8%	**b.** Introducción	X		
0.2%	**c.** Ortografía	X		
0.2%	**d.** Desarrollo coherente del tema	X		
0.4%	**e.** citar fuentes de información	X		
4%	**Enfoque**: buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
10%	**Elaboración**: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
4%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
10%	CALIFICACIÓN	**20%**		

PROBLEMARIO 4

1. Dados u= (2,-7) y v = (5,3), calcular que se obtiene al realizar 3u+4v.

Solución: w = 3u + 4v

w = 3 (2, -7) +4 (5, 3)

w = (6, -21) + (20, 12)

w = (6 + 20, -21 + 12)

w = (26, -9)

2. Determine la linealidad de los siguientes vectores: $\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$

vector e igualando a cero.

$$X\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}-2x + 3y - 2z &= 0\\ x + 2y + 3z &= 0\\ 4x - 6y + 4z &= 0\end{aligned}$$

Gauss.

$$\left|\begin{array}{ccc|c|l} -2 & 3 & -2 & 0 & (2)\\ 1 & 2 & 3 & 0 & \\ 4 & -6 & 4 & 0 & (+)\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c|l} -2 & 3 & -2 & 0 & (1/2)\\ 1 & 2 & 3 & 0 & (+)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c|l} -2 & 3 & -2 & 0 & (-1/2)\\ 0 & 5/2 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c|l} 1 & -3/2 & 1 & 0 & \\ 0 & 5/2 & 2 & 0 & (2/5)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right.$$

3. En C3 sean x = (4+i, -i, i+3i) y y = (2+2i, 3i, 2+3i) entonces:

(x * y): (4 + i) (2 + 2i) + (-i) (3i) + (1 + 3i) (2 + 3i)

(x * y): (4 + i) (2 - 2i) + (-i) (-3i) + (1 + 3i) (2 - 3i)

(x * y): 8 – 8i + 2i +2i2 + 3i2 + 2 – 3i + 6i – 9i2

(x * y): 11 – 3i – 4i2

(x * y): 15 – 3i

4.

(i) Consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual. Ortonormalizar la base $\mathcal{B} = \{(1,0,i),(1,1,2+i),(0,0,1)\}$ usando el método de Gram-Schmidt.

- $w_1 = (1,0,i)$
- $w_2 = (1,1,2+i) - \frac{\langle (1,1,2+i),(1,0,i)\rangle}{||(1,0,i)||^2}(1,0,i)$
  $= (1,1,2+i) - \frac{(2-2i)}{2}(1,0,i) = (i,1,1)$
- $w_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,i)\rangle}{||(1,0,i)||^2}(1,0,i) - \frac{\langle (0,0,1),(i,1,1)\rangle}{||(i,1,1)||^2}(i,1,1)$
  $= (0,0,1) - \frac{(-i)}{2}(1,0,i) - \frac{1}{3}(i,1,1) = (\frac{i}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

- $||w_1|| = ||(1,0,i)|| = \sqrt{2}$
- $||w_2|| = ||(i,1,1)|| = \sqrt{3}$
- $||w_3|| = ||(\frac{i}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6})|| = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$\{\frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \frac{w_3}{||w_3||}\} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}), (\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{i}{6\sqrt{6}}, -\frac{1}{3\sqrt{6}}, \frac{1}{6\sqrt{6}})\}$.

- $f_1 = 1$
- $f_2 = X - \frac{\langle X,1\rangle}{||1||^2}1 = X - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1^2 dx} = X - \frac{1}{2}$
- $f_3 = X^2 - \frac{\langle X^2,1\rangle}{||1||^2}1 - \frac{\langle X^2, X-\frac{1}{2}\rangle}{||X-\frac{1}{2}||^2}(X-\frac{1}{2})$
  $= X^2 - \frac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 1^2 dx} - \frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}(X-\frac{1}{2})$
  $= X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12}(X-\frac{1}{2})$
  $= X^2 - X + \frac{1}{6}$.

$\{1, \sqrt{12}X - \sqrt{3}, 180X^2 - 180X + 30\}$.

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: **HUMBERTO VEGA MULATO**			ASIGNATURA: ALGEBRA LIEAL
		DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN	
		NOMBRE DEL ALUMNO: ROSA ISELA CHAPOL PONCIANO	**UNIDAD: IV**
PERIODO: AG2022.-ENERO 2023	**GRUPO: 301A**		**FECHA DE ENTREGA: 9-712/22**
		INSTRUCCIONES	
		Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.	

VALOR DEL REACTIVO		**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
			SI	**NO**	
4%		**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	X		
4%		**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
20%		**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
8%		**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
4%		**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
40%		**CALIFICACIÓN**	40%		