ITSSAT

Instituto Tecnológico Superior De San Adres Tuxtla

INGENIERÍA MECATRÓNICA

Asignatura: Calculo Diferencial

Maestro: Pablo Promotor Campechano

INVESTIGACIÓN UNIDAD III

Alumno: Marcial Fiscal Juan José

Kevin Tiburcio Cuevas

Daniela Yunuem Murillo Ríos

DILAN LUNA Rodríguez

Carrera: Ing. Mecatrónica

Grupo: “111 A”

Fecha: 25/11/2022

Índice

Introducción__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__._ 1

Limites laterales__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__. 2

Limites laterales por la izquierda__.__.__.__.__.__.__.__. 2 - 3

Limites laterales por la derecha__.__.__.__.__.__.__.__._ 2 - 3

Calculo de limites laterales__.__.__.__.__.__.__.__.__.__. 3 - 4

Limites infinitos y límites al finito__.__.__.__.__.__.__._ 5

Limites infinitos__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__ 5

Sugerencias para calcular limites infinitos__.__.__.__ 5 - 6

Asíntotas__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__._ 7

Asíntota horizontal__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__ 7

Asíntota vertical__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__ 8

Asíntota oblicua__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__ 8

Continuidad en un punto y en un intervalo__.__.__.__.__ 9

Definición de continuidad__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__ 9 - 10

Tipos de discontinuidades__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__._ 11

Conclusión__.__.__.__.__.__.__.__.__:__.__.__.__.__.__.__._ 12

Referencias bibliográficas__.__.__.__.__.__.__.__.__.__.__._ 13

Introducción

En esta investigación encontraremos información muy relevante acerca de los límites y sus propiedades al igual que otros temas relacionados, tenemos entendido que los límites describen cómo se comporta una función cerca de un punto, en vez de en ese punto. Esta simple pero poderosa idea es la base de todo el cálculo.

También hablamos sobre la continuidad y sabemos que una continuidad en un punto: Una función f es continua en c

3.5 Límites Laterales

Los límites laterales de una función en un punto estudian el comportamiento de la función alrededor de dicho punto. Existe el límite lateral por la izquierda y el límite lateral por la derecha, que analizan el valor de la función respectivamente a la izquierda y a la derecha del punto en cuestión.

Límites laterales por la izquierda y por la derecha

Como hemos visto en la definición de límites laterales, hay dos tipos: los límites laterales por la izquierda y los límites laterales por la derecha.

El límite lateral de la función por la izquierda se expresa con un signo menos en el punto donde se analiza el límite y, por otro lado, el límite lateral por la derecha se indica con el signo más.

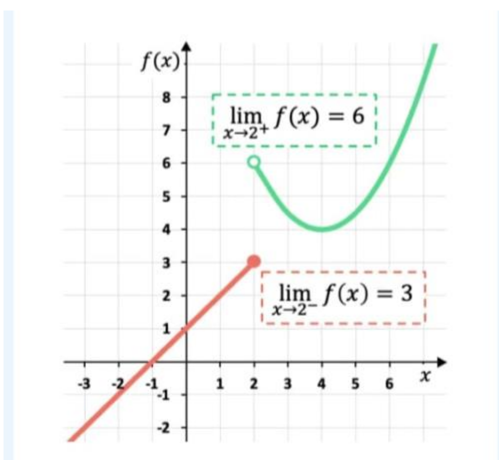
Límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Límite lateral por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Fíjate en el siguiente ejemplo para entender mejor el significado de los límites laterales:



Como puedes ver en la representación gráfica de esta función definida a trozos, los límites laterales dependen del lado en el que se calculen. En este caso, la función tiende a 3 cuando x tiende a 2 por la izquierda, ya que la función toma valores cada vez más próximos a 3 cuando x se aproxima a x=2 por su izquierda.

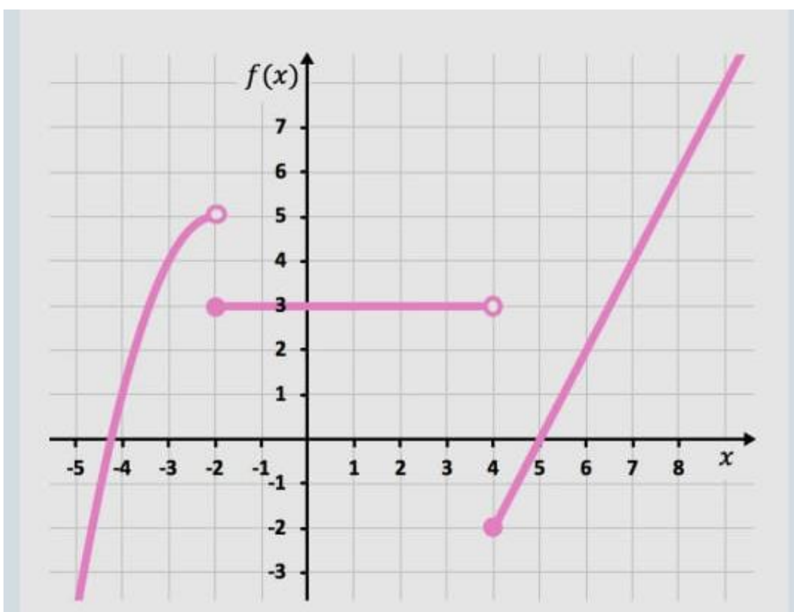
En cambio, el límite lateral de la función en x=2 por la derecha vale 6. Porque si nos acercamos al punto x=2 desde su derecha, la función va tomando valores cada vez más cercanos a f(x)=6.

Por otra parte, debes saber que los límites laterales poseen las mismas propiedades que los límites ordinarios.

Cálculo de límites laterales

Vista la definición de los límites laterales, vamos a ver cómo se calculan numéricamente resolviendo el siguiente ejemplo:

Halla los límites laterales de la siguiente función definida a trozos en los puntos donde cambia la definición $(x = -2\ y\ x = 4)$.



Los límites laterales no coinciden en el punto $x = -2$, por la izquierda la función se va aproximando a $f(x) = 5$ y, en cambio, por la derecha la función es constante y vale 3.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$$

Los límites laterales también son distintos cuando x tiende a 4. La función a trozos tiende a 3 por la izquierda, pero por la derecha tiende a -2.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$$

3.6 Límites Infinitos y Límites al Infinito

Los límites infinitos son aquellos en los que las imágenes f(x) aumentan o disminuyen sin límite cuando x se aproxima a un valor a.

LÍMITES INFINITOS

Cuando se calcula un límite de la forma:

$$\lim_{x \to C} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Y se obtiene que el límite del numerador $\lim_{x \to C} f(x) = k$ y que el límite del denominador $\lim_{x \to C} g(x) = 0$, donde k es un número diferente de cero; se dice que el límite es infinito. En estos casos el límite no existe ya que la función crece o decrece sin límite tomando valores positivos o negativos muy grandes.

La recta $x = c$ se llama asíntota vertical.

Sugerencias para para calcular límites infinitos

- Calcule el límite cuando x se aproxima a c por la derecha, para hacerlo de forma sencilla evalúe la función en un valor ligeramente mayor que c. Si el resultado es positivo el límite es infinito positivo, si el resultado es negativo el límite es infinito negativo.
- Calcule el límite cuando x se aproxima a c por la izquierda, para hacerlo de forma sencilla evalúe la función en un valor ligeramente menor que c. Si el resultado es positivo el límite es infinito positivo, si el resultado es negativo el límite es infinito negativo.
- Si el límite por la izquierda y el límite por la derecha de c son ambos infinitos positivos, se concluye que el límite es infinito positivo.

El límite de una función $f(x)$ al infinito es el número al que se acercan los valores de la función cuando la variable x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Las funciones no siempre tienen límite al infinito.

Explora los distintos ejemplos que se dan en la escena más abajo para formarte una idea intuitiva de cuándo una función:

- Tiene límite cuando x tiende a $-\infty\cdot$
- Tiene límite cuando x tiende a $+\infty\cdot$
- No tiene límite cuando x tiende a $-\infty\cdot$
- No tiene límite cuando x tiende a $+\infty\cdot$
- Tiende a ∞ cuando x tiende a $-\infty\cdot$
- Tiende a ∞ cuando x tiende a $+\infty\cdot$
- Tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty\cdot$
- Tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$

Cuando el límite de una función en $+\infty + \infty$ o en $-\infty - \infty$ existe y es L, se escribe:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad O \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Y se lee así: El límite de f cuando x tiende a infinito (o a menos infinito) es L.

Si la función $f(x)$ tiende a más o menos infinito, cuando x tiende a infinito, se dice que su límite no existe, pero se permite escribir:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad O \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Análogamente, si la función $f(x)$ tiende a más o menos infinito, cuando x tiende a menos infinito, se dice que su límite no existe, pero se permite escribir:

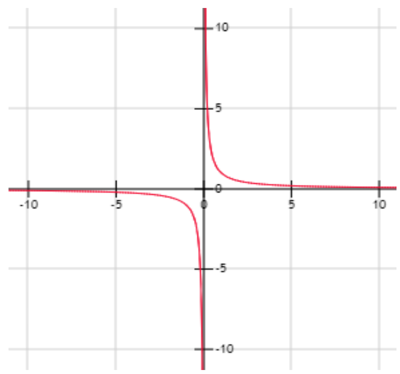
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad O \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

3.7 Asíntotas

Informalmente, decimos que la recta ***R*** es una asíntota de la función ***R*** si la gráfica de ***F*** se acerca infinitamente a la recta ***R***.

Ejemplo: La función $f(x) = {}^{1}\!/_{x}$ tiene asíntotas en las rectas $Y = 0 \;\; y \;\; x = 0$ **:**

.



Asíntota horizontal

La recta horizontal $y = a$ es una asíntota horizontal de f si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty \;\; ó \; -\infty$ es a.

La recta $y = a$ es una asíntota horizontal por la izquierda si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

La recta $y = a$ es una asíntota horizontal por la derecha si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

Según la función, puede ocurrir:

- Sólo uno de los límites es finito, por lo que la asíntota lo es en uno u otro lado (derecha o izquierda).
- Los dos límites son finitos. Si son distintos, hay una asíntota distinta en cada lado. Si coinciden, la asíntota es común en ambos lados.

Asíntota Vertical

La recta vertical $x = \boldsymbol{a}$ es una **asíntota vertical** de f si el límite de f por la derecha o por la izquierda de a tiende a infinito.

La recta $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ es una **asíntota vertical por la izquierda** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

La recta $x = \boldsymbol{a}$ es una **asíntota vertical por la derecha** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Los puntos a candidatos son aquéllos para los que f no está definida. En las funciones racionales, los candidatos son los puntos que anulan al denominador.

Asíntota Oblicua

La recta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ (siendo $a \neq 0$) es una **asíntota oblicua** de f si el límite de $f(x)$– $(ax + b)$ cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ es 0.

La recta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ es una **asíntota oblicua por la izquierda** si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

La recta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ es una **asíntota oblicua por la derecha** si

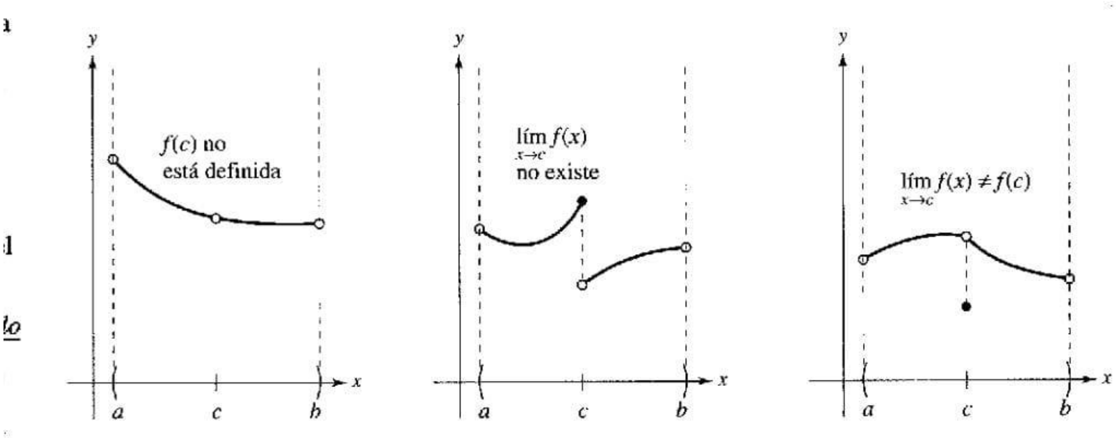
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ es una asíntota oblicua de $\boldsymbol{f}$, podemos calcular su **pendiente** con el siguiente límite:

$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ Y su **ordenada**, con el límite: $b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$

3.8 Continuidad en un Punto y en un Intervalo

En matemáticas el término continuo tiene el mismo significado que en su uso cotidiano decir de manera informal que una función es continúa en $x = c$ significa que no hay interrupción de la gráfica de f en c. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en c. En los demás puntos del intervalo (a, b), la gráfica de f no sufre interrupciones es continua.



Existen 3 condiciones para las que la gráfica de f no es continua en $x = c$

1. La función no está definida en $x = c$.
2. No existe el límite de $f(x)$ en $x = c$.
3. El límite de $f(x)$ en $x = c$ existe,, pero no es igual a $f(c)$.

Si no se da ninguna de las tres condiciones anteriores se dice que la función f es continúa en c cómo lo señala la importante definición que sigue:

Definición de continuidad

Continuidad en un punto: Una función f es continua en c si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Continuidad de un intervalo abierto: Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta de los números reales enteros $(-\infty,\ \infty)$ es continua en partes.

De modo informal Se podría decir que una función es continúa en un intervalo abierto si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Utilizar una computadora para representar gráficamente las siguientes funciones en el intervalo indicado. A la vista de las gráficas ¿qué funciones se dice que son continuas en dicho intervalo? ¿Se puede confiar en los resultados obtenidos gráficamente? Explicar el razonamiento.

Función	*Intervalo*
a) $y = x^2 + 1$	$(-3, 3)$
b) $y = \dfrac{1}{x-2}$	$(-3, 3)$
c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$(-\pi, \pi)$
d) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$	$(-3, 3)$
e) $y = \begin{cases} 2x - 4, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$	$(-3, 3)$

3.9 Tipos de Discontinuidades

Las discontinuidades se clasifican en:

Discontinuidad evitable

En este caso no se cumple la condición (a) de la definición de continuidad, es decir existe el límite finito L de $f(x)$ en $x = a$ pero $f(x)$ no está definida en a. La función puede modificarse adoptando como f(a) el valor L correspondiente, convirtiéndose así en una función continua en $x = a$.
También se clasifica como evitable la discontinuidad en la que no se cumple la condición (c) de la definición de continuidad, es decir, existen $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$, pero no coinciden. En este caso, puede salvarse la discontinuidad tomando como valor de la función el resultado del límite.

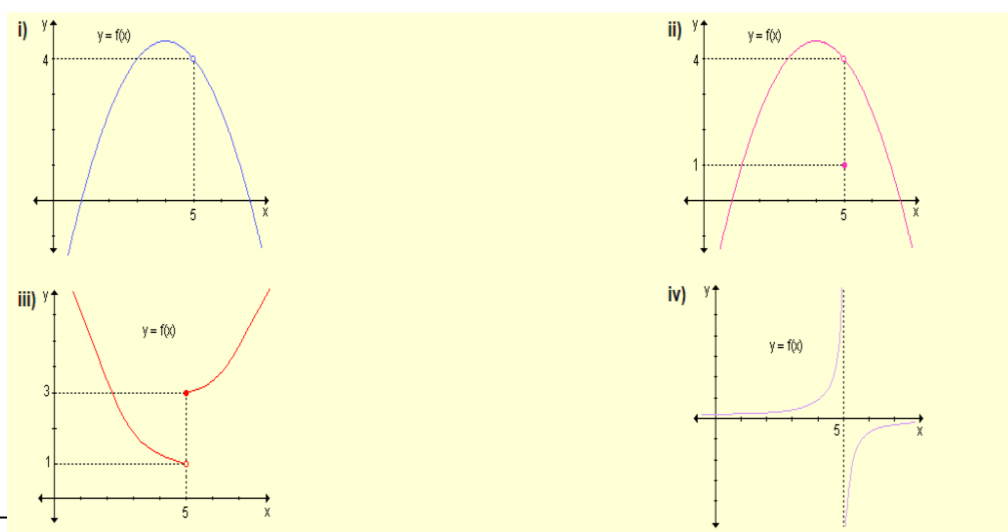
Discontinuidad de salto

Existen los límites laterales, pero son distintos.

Discontinuidad infinita

Al menos uno de los límites laterales no existe.

Ejemplo. Dadas las siguientes gráficas de funciones discontinuas en x = 5, indique el tipo de discontinuidad en cada caso.



Conclusión

En conclusión, sabemos lo importante que es comprender los temas que se muestran no tan solo para acreditar una materia, sino que también esto nos ayudara en nuestro trayecto sobre la carrera debido a que algunos de los temas mostrados son las bases para otro tipo de temas relacionados a nuestro plan de estudios por ello es importante conocer debidamente los temas.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICAS

https://matemovil.com/limites-infinitos-ejercicios-resueltos/

http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC_IMATE/recursos/3_004/index.html#:~:text=El%20l%C3%ADmite%20de%20una%20funci%C3%B3n,a%20%2B%E2%88%9E%20o%20a%20%E2%88%92%E2%88%9E.

https://hopelchen.tecnm.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r126608.PDF

https://www.matesfacil.com/BAC/funciones/asintota/asintota-horizontal-vertical-ejemplos-limites-graficas-funciones-problemas-resueltos-demostraciones.html#:~:text=As%C3%ADntota%20horizontal,-La%20recta%20horizontal&text=S%C3%B3lo%20uno%20de%20los%20l%C3%ADmites,es%20com%C3%BAn%20en%20ambos%20lados.

https://blogs.ugto.mx/rea/clase-digital-6-nocion-de-limite-definicion-de-limite-de-una-funcion-propiedades-de-los-limites/

Instituto Tecnológico Superior De San Adres Tuxtla

Asignatura: Calculo Diferencial

Maestro: Pablo Promotor Campechano

PROBLEMARIO UNIDAD III

Alumno: Marcial Fiscal Juan José

Kevin Tiburcio Cuevas

Daniela Yunuem Murillo Ríos

DILAN LUNA Rodríguez

Carrera: Ing. Mecatrónica

Grupo: "111 A"

Fecha: 25/11/2022

Problemario de la Unidad III

Calcular los siguientes limites.

$$\lim_{x\to 2} (-x^2 + x - 2) = (-(2)^2 + 2 - 2) = -4 + 2 - 2 = -4$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x-4} = \frac{\sqrt{3+1}}{3-4} = \frac{\sqrt{4}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{4x^2 - 6x + 3}{16x^2 + 8x - 7} = \frac{4(1/2)^2 - 6(1/2) + 3}{16(1/2)^2 + 8(1/2) - 7} = \frac{1 - 3 + 3}{4 + 4 - 7} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} = \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} = \sqrt{16 + 8 + 1} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{0+2} - \sqrt{2}}{0} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}\right) = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{(x)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$U^2 - V^2 = (U+V)(U-V)$$

$$(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) = (x + 2 - 2) = x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{x-16} = \frac{4-\sqrt{16}}{16-16} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{4-\sqrt{x}}{x-16}\right)\left(\frac{4+\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}\right) = \frac{(4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x})}{(x-16)(4+\sqrt{x})}$$

$$U^2 - V^2 = (U+V)(U-V)$$

$$(4)^2 - (\sqrt{x})^2 = (4-\sqrt{x})(4+\sqrt{x}) = 16 - x = -(x-16)$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{-(x-16)}{(x-16)(4+\sqrt{x})} = \frac{-1}{4+\sqrt{x}} = \frac{-1}{4+\sqrt{16}} = \frac{-1}{4+4} = \frac{-1}{8}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1} = \frac{2(-1)^2-(-1)-3}{-1+1} = \frac{2+1-3}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{2(2x^2-x-3)}{2} = \frac{(2x)^2-1(2x)-6}{} = \frac{(2x-3)(2x+2)}{2}$$

$$= (2x-3)(x+1)$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} = 1(2x-3) = 1(2(-1)-3) = 1(-2-3) = -5$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{(1)^2+1-2}{(1)^2-1} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)\ * \qquad (x)^2-(1)^2 = (x+1)(x-1)\ *$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1(x+2)}{x+1} = \frac{1(1+2)}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \frac{\sqrt{-1+5}-2}{-1+1} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2}\right) = \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+5)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$$

$$U^2-V^2 = (U+V)(U-V)$$

$$(\sqrt{x+5})^2-(2)^2 = (\sqrt{x+5}+2)(\sqrt{x+5}-2) = x+5-4 = x+1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{1}{\sqrt{-1+5}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \frac{4(3/2)^2 - 9}{2(3/2) + 3} = \frac{9 - 9}{3 + 3} = \frac{0}{6}$$

$$U^2 - V^2 = (U + V)(U - V) =$$

$$(2x)^2 - (3)^2 = (2x + 3)(2x - 3)$$

$$\lim_{x \to 3/2} \frac{(2x+3)(2x-3)}{2x+3} = 1(2x - 3) = 1(2(3/2) - 3) = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{\sqrt{0^2 + 9} - 3}{0^2} = \frac{\sqrt{9} - 3}{0} = \frac{3 - 3}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}\right)\left(\frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}\right) = \frac{(\sqrt{t^2 + 9} - 3)(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}{(t^2)(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}$$

$$U^2 - V^2 = (U + V)(U - V) =$$

$$(\sqrt{t^2 + 9})^2 - (3)^2 = (\sqrt{t^2 + 9} + 3)(\sqrt{t^2 + 9} - 3) = t^2 + 9 - 9 = t^2$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 9} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{\sqrt{0+4}-2}{0} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right) = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{(x)(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$U^2-V^2=(U+V)(U-V)$$

$$(\sqrt{x+4})^2-(2)^2=(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2) = x+4-4 = x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(x)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{1^3-1}{1^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$U^3-V^3=(U-V)(U^2+UV+V^2)$$

$$(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1^2)$$

$$U^2-V^2=(U+V)(U-V)$$

$$(x)^2-(1)^2=(x+1)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1}$$

$$= \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \frac{0}{\sqrt{1+3(0)}-1} = \frac{0}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}\right) = \frac{(x)(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)}$$

$$U^2-V^2=(U+V)(U-V)$$

$$(\sqrt{1+3x})^2-(1)^2=(\sqrt{1+3x}+1)(\sqrt{1+3x}-1)=1+3x-1=3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x)(\sqrt{1+3x}+1)}{3} = \frac{\sqrt{1+3(0)}+1}{3} = \frac{\sqrt{1}+1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\right) = \frac{\sqrt{0+3}-\sqrt{3}}{0} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right) = \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{(x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$U^2-V^2=(U+V)(U-V)$$

$$(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})=x+3-3=x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{(x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{0+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2}\right) = \frac{3(2)^2 - 2 - 10}{2^2 - 2 - 2} = \frac{12 - 2 - 10}{4 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{3(3x^2 - x - 10)}{3} = \frac{(3x)^2 - 1(3x) - 30}{} = \frac{(3x-6)(3x+5)}{3}$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \qquad = (x-2)(3x+5)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1(3x+5)}{x+1} = \frac{1(3(2)+5)}{2+1} = \frac{6+5}{3} = \frac{11}{3}$$