Algebra lineal

Instituto Tecnológico superior de San Andrés Tuxtla.

Ingeniería industrial

Asignatura: Algebra lineal

Docente: Pablo Promotor

Integrantes:

- Cruz Juárez Alondra Jared
- Ton López América Yamileth
- Toto Polito Rosario del Carmen

Reporte de investigación unidad 3.

San Andrés Tuxtla Ver.

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden definir como: "el problema central del álgebra lineal" (Strang, 1982, p.1). Una ecuación es una igualdad de dos expresiones en la que aparecen números e incógnitas ligadas mediante operaciones algebraicas; es la condición que deben cumplir ciertos números. Por lo que pueden existir diferentes ecuaciones que expresen una misma condición.

Existen conceptos que son importantes en la resolución de problemas de álgebra lineal, y que requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Además, estos tienen una aplicación en distintas áreas de conocimiento, como la ingeniería o la computación; y por supuesto en áreas de la matemática, como la geometría analítica o la investigación de operaciones.

En consecuencia, el estudio, la enseñanza y comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales son esenciales y necesarios en la formación de perfiles profesionales. Una de las dificultades que se podrían tener en la resolución de los problemas matemáticos esta relacionados directamente con los cálculos aritméticos. Ya que algunos de los métodos que se utilizan resultan ser un poco tediosos y extensos.

Los sistemas de ecuaciones son herramientas de carácter imprescindibles en la practica de la ingeniería. Estos son utilizados en diversos fenómenos de la física en los cuales están presentes una cantidad considerable de variables y que su comportamiento indica una relación entre ellas.

La solución de cualquier sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de n valores que cumplen de manera simultanea a un grupo de ecuaciones. En la solución de dicho sistema se pueden presentar tres casos:

1. Que el sistema no tenga solución finita. Se dice entonces que el sistema es incompatible.
2. Que el sistema tenga solución finita única. En este caso se dice que el sistema es compatible determinado.
3. Que tenga más de una solución. Por lo tanto, el sistema es entonces compatible indeterminado.

Para la resolución de ecuaciones se suele utilizar un método muy conocido y útil el cual es el Gauss Jordan. Este método debe su nombre a Carl Friedrich Gauss y a Wilhelm Jordan. Consiste en una serie de algoritmos del álgebra lineal para determinar los resultados de un sistema de ecuaciones lineales y así hallar matrices e inversas.

Las siguientes operaciones con un sistema de ecuaciones lineales se llaman operaciones elementales:

- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Intercambiar de posición dos ecuaciones.
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

El propósito de este reporte es comprender como se realizan algunos de los métodos de resoluciones de ecuaciones, la información que se presenta esta expresada de manera clara y precisa para su mayor comprensión.

Definición de sistemas de ecuaciones lineales.

un sistema de ecuaciones lineales, también conocido como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x_1, x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones. En general, un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}$$

Esto se conoce como Matriz Aumentada del sistema. (El término matriz se emplea en matemáticas para denotar un arreglo rectangular de números, las matrices aparecen en varios contextos).

Sus elementos son los siguientes:

- Coeficientes: aij para i = 1, 2, ..., m j = 1, 2,..................n
- Términos independientes: bi para i = 1, 2, ..., m
- Incógnitas del sistema: x_1, x_2, ...xn

Sistemas equivalentes.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. (Obsérvese que no necesariamente han de tener el mismo número de ecuaciones.) Pasos para resolver la matriz:

- Multiplicar una ecuación (o renglón) por una constante diferente de cero.
- Intercambiar dos ecuaciones (renglones).
- Sumar un múltiplo de una ecuación (renglón) a otra.
- Dado que los renglones (líneas horizontales) de una matriz aumentada corresponden a las ecuaciones del sistema asociado, estas tres operaciones equivalen a las operaciones con renglones de la matriz aumentada.

clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales y tipos de solución

Una de las clasificaciones que podemos hacer con los sistemas de ecuaciones lineales atiende al número de sus soluciones. Pueden ser de tres tipos:

- **Compatible determinado**: cuando tienen una única solución, es decir, cada incógnita sólo puede tomar un determinado valor.
- **Compatible indeterminado**: cuando tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible**: cuando no existe solución.

Cualquier sistema que pretendamos resolver puede ser, a priori, de alguno de estos tipos. ¿Cómo darnos cuenta del tipo de sistema de que se trata? Se puede afirmar que si, al intentar resolver el sistema, y no cometiendo errores, nos encontramos con que

- Llegamos a la solución, es que se trata de un sistema **compatible determinado**.
- En alguna ecuación desaparecen las incógnitas, quedando de la forma ***0 = 0***, dicha ecuación puede eliminarse. Si al hacerlo, quedan menos ecuaciones que incógnitas, es que se trata de un sistema **compatible indeterminado**.
- En alguna ecuación desaparecen las incógnitas, pero queda de la forma ***0 = K*** (sindo *k* un número no nulo), aunque quede alguna otra del tipo 0 = 0, es que se trata de un sistema **incompatible**.

a) Ecuaciones lineales propiamente tales

En este tipo de ecuación el denominador de todas las expresiones algebraicas es igual a 1 y no se presentan como fracción, aunque el resultado sí puede serlo.

Para proceder a la resolución se debe:

- Eliminar paréntesis.
- Dejar todos los términos que contengan a "x" en un miembro y los números en el otro.

Luego despejar "x" reduciendo términos semejantes.

Ejemplo:

$4x - 2(6x - 5) = 3x + 12(2x + 16)$

$4x - 12x + 10 = 3x + 24x + 192$

$4x - 12x - 3x - 24x = 192 - 10$

$-35x = 182$

$$\mathbf{x} = \frac{182}{-35} \qquad \div \frac{7}{7}$$

$$\mathbf{x} = -\frac{26}{5}$$

b) Ecuaciones fraccionarias

En este tipo de ecuación lineal el denominador de a lo menos una de las expresiones algebraicas es diferente de 1 (es una fracción).

Para proceder a la resolución se debe:

Llevar a ecuación lineal (eliminar la fracción) multiplicando la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores (m.c.m.)

Ejemplo:

$$\frac{3\mathbf{x}}{2} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{3\mathbf{x}}{4} - \frac{\mathbf{x}}{3}$$

$$6(3\mathbf{x}) + 3(1) + 12(2) = 3(3\mathbf{x}) - 4(\mathbf{x})$$

$$18\mathbf{x} + 3 + 24 = 9\mathbf{x} - 4\mathbf{x}$$

$$18\mathbf{x} - 9\mathbf{x} + 4\mathbf{x} = -24 - 3$$

$$13\mathbf{x} = -27$$

$$\mathbf{x} = -\frac{27}{13}$$

c) Ecuaciones literales:

Pueden ser lineales o fraccionarias. Si son fraccionarias, se llevan al tipo lineal, pero en el paso de reducir términos semejantes se factoriza por "x" para despejarla.

Ejemplo:

$$\frac{x}{a} + x = \frac{2a}{b} \quad / \cdot ab$$

$$b(x) + ab(x) = a(2a)$$

$$cx + abx = 2a^2$$

$$x(b + ab) = 2a^2$$

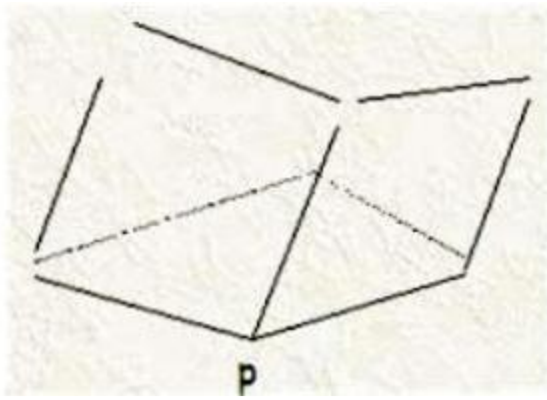
$$x = \frac{2a^2}{b(1 + a)}$$

Interpretación geométrica de las soluciones.

Cada ecuación representa un plano en el espacio tridimensional. Luego se trata de estudiar la posición relativa de tres planos en el espacio. Las soluciones del sistema son geométricamente los puntos de intersección de los tres planos, los casos son:

=Un punto único. Sistema compatible determinado. Los tres planos se cortan en

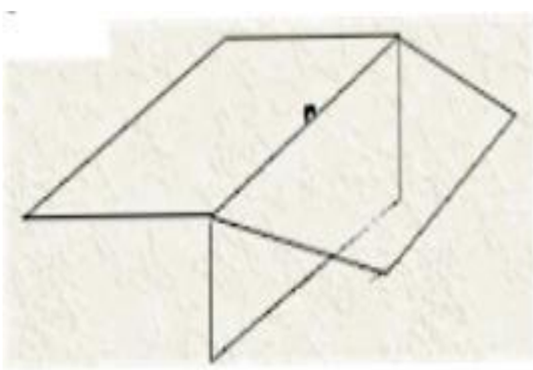
P.



=Una recta. Son soluciones todos los puntos representativos de la recta común.

Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad. Los planosse cortan

en r.

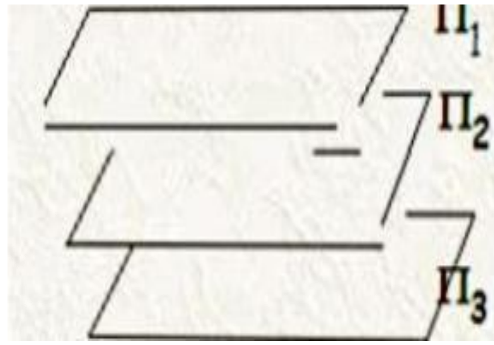


=Un plano. Los planos son coincidentes. El sistema es compatible indeterminado

con dos grados de libertad.

=Ningún punto. El sistema es incompatible. Esta situación se presenta

Geométricamente de distintas maneras. Para estudiar las posiciones relativas de los planos hay que tomarlos de dos en dos.



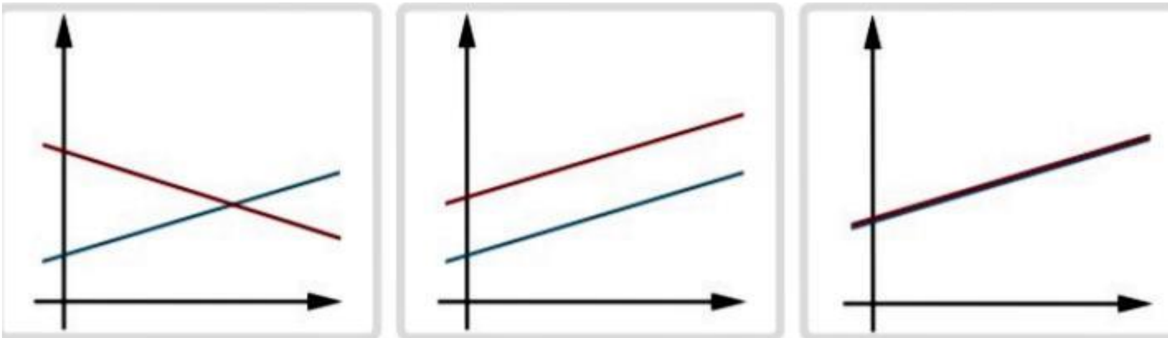
=Se pueden presentar varios casos: Que los planos sean paralelos

Un sistema de ecuaciones diferenciales es aquellas que tienen varias posibilidades para su solución. Estas son:

Solución única: Sólo es posible obtener una solución única para un sistema de ecuaciones lineales interceptado en un único punto determinado, por lo tanto, el sistema de ecuaciones donde tenemos todas las rectas entrecruzándose en un solo punto, se denomina como la solución única del sistema de ecuaciones. Ese sistema de ecuaciones lineales es llamado sistema de ecuaciones lineales consistente independiente.

Sin solución: Es posible que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución cuando ningunas de sus rectas se interceptan entre sí ni siquiera en el infinito, ya que sólo el punto de intersección es la solución para el sistema de ecuaciones lineales Esto sólo puede ocurrir en el caso de las rectas paralelas, por lo tanto, para un sistema con este tipo de ecuación tenemos varias ecuaciones que corresponden a la misma recta y que sólo difieren por la pendiente. Dicho sistema se denomina sistema de ecuaciones lineales inconsistente independiente.

Infinitas soluciones: Sólo en la situación que las rectas de determinado sistema se encuentren unas con otras en un punto infinito, podemos obtener soluciones infinitas. Esto sólo puede suceder si todas las rectas son la misma recta, ya que es en este escenario que se superpondrán unas con otras dándonos puntos infinitos de intersección, es decir, infinitas soluciones. Este sistema es llamado sistema de ecuaciones lineales consistente dependiente.



$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Solución única	**No hay solución**	**Infinitas soluciones**

Problemario
unidad 3

- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

1.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 10x_1 - 5x_2 - 15x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 10 \\ 10 & -5 & -15 & 30 \\ 1 & 1 & -3 & 25 \end{array}\right] R_1 \rightleftarrows R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 25 \\ 10 & -5 & -15 & 30 \\ -2 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2-10(R_1) = \\ R_3+2(R_1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 25 \\ 0 & -15 & 15 & -220 \\ 0 & 3 & -3 & 60 \end{array}\right] R_2/-15 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & 44/3 \\ 0 & 3 & -3 & 60 \end{array}\right]$$

$$R_3-3(R_2) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & 44/3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right]$$

El sistema no tiene solución

2.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 54 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 6 & 24 \\ 3 & -3 & 1 & 54 \\ -2 & 1 & -5 & 30 \end{array}\right] R_1/5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/5 & 6/5 & 24/5 \\ 3 & -3 & 1 & 54 \\ -2 & 1 & -5 & 30 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2-3(R_1) = \\ R_3+2(R_1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/5 & 6/5 & 24/5 \\ 0 & -3/5 & -13/5 & 198/5 \\ 0 & -3/5 & -13/5 & 198/5 \end{array}\right] R_2/-3/5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/5 & 6/5 & 24/5 \\ 0 & 1 & 13/3 & -66 \\ 0 & -3/5 & -13/5 & 198/5 \end{array}\right] R_3+3/5(R_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4/5 & 6/5 & 24/5 \\ 0 & 1 & 13/3 & -66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 + 13/3x_3 = -66$

$x_2 = -66 - 13/3x_3$

$x_2 = -66$

$x_1 - 4/5x_2 + 6/5x_3 = 24/5$

$x_1 = 24/5 + 4/5(-66) - 6/5x_3$

$x_1 = -48$

$x_3 = 0$

El sistema tiene número infinito de soluciones.

/ /

3.

$$\begin{aligned}
20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 &= 6000\\
150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 &= 40000\\
1000x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 200x_4 &= 150000\\
-2x_1 - 2x_2 + 0 + x_4 &= 0 \longrightarrow x_4 = 2(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 20 & 30 & 8 & 6 & 6000\\ 150 & 100 & 60 & 70 & 40000\\ 1000 & 300 & 400 & 200 & 150000\\ -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] R_1/20 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 150 & 100 & 60 & 70 & 40000\\ 1000 & 300 & 400 & 200 & 150000\\ -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 150(R_1)\\ R_3 - 1000(R_1)\\ R_3 + 2(R_1) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & -125 & 0 & 25 & -5000\\ 0 & -1200 & 0 & -100 & -150000\\ 0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 \end{array}\right] R_2/-125 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40\\ 0 & -1200 & 0 & -100 & -150000\\ 0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 1200(R_2)\\ R_4 - 1(R_2) \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40\\ 0 & 0 & 0 & -340 & -150000\\ 0 & 0 & 0.8 & 1.8 & 560 \end{array}\right] R_3 \rightleftarrows R_4 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40\\ 0 & 0 & 0.8 & 1.8 & 560\\ 0 & 0 & 0 & -340 & -150000 \end{array}\right]$$

$$R_3/0.8 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40\\ 0 & 0 & 1 & 2.25 & 700\\ 0 & 0 & 0 & -340 & -150000 \end{array}\right] R_4/-340 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1.5 & 0.4 & 0.3 & 300\\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40\\ 0 & 0 & 1 & 2.25 & 700\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7500/17 \end{array}\right]$$

$x_4 = \frac{7500}{17}$

$x_3 + 2.25x_4 = 700$

$x_3 = 700 - 16875/17$

$x_3 = -4975/17$

$x_2 - 0.2x_4 = 40$

$x_2 = 40 + 1500/17$

$x_2 = 2180/17$

$x_1 + 1.5x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 = 300$

$x_1 = 300 - \frac{3270}{17} + \frac{1990}{17} - \frac{2250}{17}$

$x_1 = 1570/17$

El sistema tiene solución única.

4.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3 &= 1200 \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 &= 1150 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1400 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3.5 & 3 & 1200 \\ 3 & 2.5 & 2 & 1150 \\ 4 & 3 & 2 & 1400 \end{array}\right] R_1/2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.75 & 1.5 & 600 \\ 3 & 2.5 & 2 & 1150 \\ 4 & 3 & 2 & 1400 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2-3(R_1) \\ R_3-4(R_1) \end{array} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.75 & 1.5 & 600 \\ 0 & -2.75 & -2.5 & -650 \\ 0 & -4 & -4 & -1000 \end{array}\right] R_2/-2.75$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.75 & 1.5 & 600 \\ 0 & 1 & 10/11 & 2600/11 \\ 0 & -4 & -4 & -1000 \end{array}\right] R_3+4(R_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.75 & 1.5 & 600 \\ 0 & 1 & 10/11 & 2600/11 \\ 0 & 0 & -4/11 & -600/11 \end{array}\right] R_3/-4/11$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.75 & 1.5 & 600 \\ 0 & 1 & 10/11 & 2600/11 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right]$$

$x_3 = 150$

$x_2 + 10/11 x_3 = 2600/11$

$x_2 = 2600/11 - 10/11(150)$

$x_2 = 100$

$x_1 + 1.75x_2 + 1.5x_3 = 600$

$x_1 = 600 - 1.75(100) - 1.5(150)$

$x_1 = 200$

El sistema tiene solución unica.

Ejercicios: De aplicación

Decisiones sobre producción

Una empresa elabora tres productos A, B y C, los cuales deben procesarse por 3 máquinas I, II y III. Una unidad de A requiere 3, 1 y 8 horas de procesamiento en las máquinas, mientras que 1 unidad de B requiere 2, 3 y 3 y una unidad de C necesita 2, 4 y 2 horas en máquinas. Se dispone de las máquinas I, II y III por 800, 1200 y 1300 horas, respectivamente. ¿Cuántas unidades de cada producto pueden elaborarse usando todo el tiempo disponible en la máquina?

	A	B	C	
Máquina 1	$3x_1$	$2x_2$	$2x_3$	$= 800$
Máquina 2	x	$3x$	$4x$	$= 1200$
Máquina 3	$8x$	$3x$	$2x$	$= 1300$

Ecuaciones

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 800$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1200$$
$$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1300$$

Determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 3(6-12) - 2(2-32) + 2(3-24) \\ 3(-6) - 2(-30) + 2(-21) \\ -18 + 60 - 42 = \underline{0} \end{array}$$

Carga (aérea)

Una compañía de carga transportó tres tipos de fletes en su transporte aéreo ligero. El espacio requerido por cada unidad de los tres tipos de carga eran de 5, 2, y 4 pies cúbicos respectivamente. Cada unidad de los tres tipos de carga pesó 2, 3 y 1 kg, mientras que los valores unitarios de los tres tipos de carga fueron \$10, \$40 y \$60 respectivamente. Determine el número de unidades de cada tipo de carga transportada si el valor total de la carga fue de \$13,500 ocupó 1050 pies cúbicos de espacio y peso 550 kg.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 800 \\ 1 & 3 & 4 & 1200 \\ 8 & 3 & 2 & 1300 \end{array}\right] \quad R2 \leftrightarrows R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1200 \\ 0 & -7 & -10 & -2800 \\ 0 & -21 & -30 & -8300 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R2-3R1 \\ R3-8R1 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1200 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & 400 \\ 0 & -21 & -30 & -8300 \end{array}\right] \quad \frac{R2}{-7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1200 \\ 0 & 1 & 10/7 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right] \quad R3+21R2$$

/ /

Espacio Peso

Carga 1 -

Carga 2

Carga 3

Ecuaciones

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1050$ Espacio

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 550$ Peso

$10x_1 + 40x_2 + 60x_3 = 13500$ Valores unitarios

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 1050 \\ 2 & 3 & 1 & 550 \\ 10 & 40 & 60 & 13500 \end{array}\right] \quad \frac{R1}{5} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 210 \\ 0 & \frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 130 \\ 0 & 36 & 52 & 11400 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R2 - 2R1 \\ R3 - 10R1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 210 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{650}{11} \\ 0 & 36 & 52 & 11400 \end{array}\right] \quad \frac{R2}{\frac{11}{5}} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 210 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{650}{11} \\ 0 & 0 & \frac{680}{11} & \frac{102000}{11} \end{array}\right] \quad R3 - 36R2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 210 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{650}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}\right] \quad \frac{R3}{\frac{680}{11}}$$

$x_3 = 150$

$x_2 - \frac{3}{11}x_3 = \frac{650}{11}$

$x_2 - \frac{3}{11}(150) = \frac{650}{11}$

$x_2 = \frac{650}{11} + \frac{450}{11}$

$x_2 = \frac{1100}{11}$

$x_2 = 100$

$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 = 210$

$x_1 + \frac{2}{5}(100) + \frac{4}{5}(150) = 210$

$x_1 + 40 + 120 = 210$

$x_1 = 210 - 160$

$x_1 = 50$

Resultado

Unidad 1: 50

Unidad 2: 100

Unidad 3: 150

Quick Publisher edita tres calidades de libros: encuadernación rustica, con pasta dura y empastados en piel. Para los rusticos, la empresa gasta en promedio \$5 en papel, \$2 en ilustraciones y \$3 en las pastas. Para los de pasta dura, los gastos son \$10 en papel, \$4 en ilustraciones y \$8 en pastas y para los lujo empastados en piel, \$20 en papel, \$12 en ilustraciones y \$24 en pastas. Si el presupuesto permite \$235 000 en papel, \$110 000 en ilustraciones y \$205 000 en pastas. ¿Cuantos libros de cada categoria pueden producirse?

Ecuaciones

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 235\,000$$
$$2x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 110\,000$$
$$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 = 205\,000$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 8 & 24 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 235\,000 \\ 110\,000 \\ 205\,000 \end{bmatrix}$$

Determinante A

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 2 & 4 & 12 \\ 3 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 5(\cancel{96-96}) - 10(48-36) + 20(16-12) = -120 + 80 = -40$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 235\,000 & 10 & 20 \\ 110\,000 & 4 & 12 \\ 205\,000 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 235000(\cancel{96-96}) - 10(2640000 - 2460000) + 20(880000 - 820000) = -1,800,000 + 1\,200\,000 = -600\,000$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 235\,000 & 20 \\ 2 & 110\,000 & 12 \\ 3 & 205000 & 24 \end{vmatrix} = 5(2640000 - 2460000) - 235000(48-36) + 20(410000 - 330000) = 900\,000 - 2820000 + 1600000 = -320\,000$$

$$A3 = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 235\,000 \\ 2 & 4 & 110\,000 \\ 3 & 8 & 205\,000 \end{bmatrix}$$

$= 5(820\,000 - 880\,000) - 10(410\,000 - 330\,000) +$
$235\,000(16 - 12)$
$= -300\,000 - 800\,000 + 940\,000 = -160\,000$

$$A1 = \frac{-600\,000}{-40} = 15\,000$$

$$A2 = \frac{-320\,000}{-40} = 8000$$

$$A3 = \frac{-160\,000}{-40} = 4000$$

Categoría rustico: 15 000
Categoría pasta dura: 8 000
Categoría Piel: 4000

22 / Nov / 2022

ejercicios
unidad 3

5)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

matriz aumentada
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & = & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & = & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & = & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & = & 4 \end{array}\right]$$

matriz de identidad
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_2 - 1(R_1) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \quad R_3 - 2(R_1) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \quad R_4 + 1(R_1) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$R_2 \rightleftarrows R_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad \frac{R_2}{-1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad R_3 + 2(R_2) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \quad R_4 - 2(R_2)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \frac{R_3}{6} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad R_4 + 4(R_3) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución infinita

$$\begin{aligned} x_3 + 0.5x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 - 0.5(1) \\ x_3 &= -0.5 \end{aligned}$$

$x_4 = 0$

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ x_2 + 3(-0.5) + 0 &= 3 \\ x_2 - 1.5 &= 3 \\ x_2 &= 3 + 1.5 \\ x_2 &= 4.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 4.5 + (-0.5) + 0 &= 2 \\ x_1 + 4.5 - 0.5 &= 2 \\ x_1 &= 2 - 4.5 + 0.5 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

6) $x + 2y - 3z - t = 2$
$2x + 4y + z - t = 1$
$3x + 6y + 2z + t = -7$
$x + 2y + z + t = 6$

matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & = & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & = & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & = & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & = & 6 \end{bmatrix}$$

matriz de identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 - 2(R_1)$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$ $R_3 - 3(R_1)$, $R_4 - 1(R_1)$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$ $R_2 + 1$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$

$\frac{R_3}{11}$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & -1.8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$ $R_4 - 4(R_3)$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & -1.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.2 \end{array}\right]$

El sistema no tiene solución

7) Una pequeña compañía constructora ofrece tres tipos de casas. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 5 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades, respectivamente de concreto, madera para cancelería y madera para estructuras. Si cada mes la compañía dispone de 150 unidades de concreto, 100 unidades de madera para cancelería y 250 unidades de madera para estructuras, calcule el número de diferentes tipos de casas que la compañía podrá construir al mes si usa todos los materiales de que dispone.

	X_1	X_2	X_3	unidades por mes
unidades de concreto	3	2	4	150
unidades de madera para cancelería	2	3	2	100
unidades de madera para estructuras	5	5	6	250

$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 150$
$2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 100$
$5X_1 + 5X_2 + 6X_3 = 250$

22 / Nov / 2022

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 150 \\ 2 & 3 & 2 & 100 \\ 5 & 5 & 6 & 250 \end{array}\right] \quad \frac{R_1}{3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 50 \\ 2 & 3 & 2 & 100 \\ 5 & 5 & 6 & 250 \end{array}\right] \quad R_2 - 2(R_1) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 50 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 250 \end{array}\right]$$

$$R_3 - 5(R_1) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 50 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 0 \end{array}\right] \quad \frac{R_2}{5/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 50 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 0 \end{array}\right] \quad R_3 - \frac{5}{3}(R_2) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 50 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución infinita

$X_3 = 0$

$X_2 - 2/5 X_3 = 0$
$X_2 - 2/5(0) = 0$
$X_2 = 0$

$X_1 + 2/3 X_2 + 4/3 X_3 = 50$
$X_1 + 2/3(0) + 4/3(0) = 50$
$X_1 = 50$