EJERCICIOS CLASE UNIDAD 1

Ecuaciones Diferenciales

Docente: Dr. Josué Ángel Nieves Robles
Alumno: Barrios Ortiz Manuel Omar
Grupo 411-A

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA
INGENIERÍA MECATÓNICA

UNIDAD 1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1.1 Teoría preliminar.

1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)

1.1.2 Soluciones de las ecuaciones diferenciales.

1.1.3 Problema de valor inicial.

1.1.4 Teorema de existencia y unicidad.

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2.1 Variables separables y reducibles.

1.2.2 Homogéneas.

1.2.3 Exactas.

1.2.4 Lineales.

1.2.5 De Bernoulli.

1.3 Aplicaciones.

7 / Sep / 2022

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios el orden de la ecuación diferencial dada, así como si es lineal o no lineal.

$(y'')^2 + 3x = 2(y')^3$ donde $y' = \frac{dy}{dx}$ $y'' = \frac{d^2y}{d^2x}$ — Orden 2, No lineal

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$ — Orden 1, lineal

$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2\frac{Q}{t} = 4 \operatorname{sen} 2t$ — Orden 2, No lineal

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ o $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$ — Orden 1, lineal

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ — Orden 2, lineal

Nota:

Una ecuación diferencial se dice lineal si:

- La variable dependiente y sus derivadas estan a y solo a la primera potencia o a
- No haya multiplicaciones aplicandoseles a la variable dependientes y sus derivadas
- No debe haber funciones no lineales que relacionen a la variable dependiente tal como funciones trigonométricas, exponenciales, etc.

7 / Sep / 2022

4 ($\cancel{y}$) 7/9/2022

Evaluacion Diagnostica

1: Develop and Simplified the Follow Expressions

1: $3(x+6)+4(2x-5) \rightarrow 3x+18+8x-20 = 11x-2$

2: $(x+3)(4x-5) \rightarrow 4x^2-5x+12x-15 = 4x^2+7x-15$

3: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \rightarrow \sqrt{a}\sqrt{a} - \cancel{\sqrt{b}\sqrt{a}} + \cancel{\sqrt{b}\sqrt{a}} - \sqrt{b}\sqrt{b} = a - b$

4: $(2x+3)^2 \rightarrow 4x^2+6x+6x+9 = 4x^2+12x+9$

2: Factorization of the Follow Expressions

1: $4x^2-25 \rightarrow (2x-5)(2x+5)$

2: $2x^2-5x-12 \rightarrow ($

3: $x^2y-4xy \rightarrow (x-4) \quad (xy) \quad (xy-2x)(x^2+2y) \quad x^3y+2xy^2-2x^3-4xy$

3: Simplified the Follow rational Expressions

1: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$

2: $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9} \cdot \dfrac{(x+3)}{2x+1}$

3: $\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x+2}$

2: $\dfrac{2x^2+x-2x-1}{x^2-9} \rightarrow \dfrac{x \cdot (2x+1) - (2x+1)}{(x-3)(x-3)} \cdot \dfrac{x+3}{2x+1}$

$\dfrac{x(2x+1)(2x+1)}{x-3} \cdot \dfrac{1}{2x+1} \rightarrow \dfrac{(\cancel{2x+1})(x-1)}{x-3} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2x+1}}$

$\dfrac{x-1}{x-3}$

1: 1: $\dfrac{(\cancel{x+1})(x+2)}{(\cancel{x+1})(x-2)} = \dfrac{(x+2)}{(x-2)}$ $\quad x-2 \overline{)\,x+2\,}$ quotient 1, $-(x-2)$, remainder 4 $\Rightarrow 1 \ \dfrac{4}{x-2}$

2: $\dfrac{2x^3-x^2-x+6x^2-3x-3}{2x^3+x^2-18x-9} = \dfrac{\cancel{2x^3}+5x^2-4x-3}{\cancel{2x^3}+\cancel{x^2}-18x-9} \quad \dfrac{5-4-3}{18-9} =$

3: $\dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{(x+1)}{(x+2)}$

$\dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+2)} \rightarrow \dfrac{x^2-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \quad \dfrac{x^2-(x^2-x-2)}{(x-2)(x+2)} \rightarrow \dfrac{\cancel{x+2}}{(x-2)(\cancel{x+2})} \rightarrow$

$\dfrac{1}{x-2}$

The Function $y = \frac{x^4}{16}$ satisfies the diferential equation $y' = xy^{1/2}$ and the initial condition $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = x^2\,dx \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\int y^{-1/2}\,dy =$$

$$\int \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} =$$

$$\int \frac{y^{1/2}}{-1/2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \cancel{\times 2}$$

$$\left(\frac{y^{1/2}}{-1/2} = \frac{x^2}{2}\right)^2 = \left(2y^{1/2} = \frac{x^2}{2}\right)^2 = 4y = \frac{x^4}{4}$$

$$y = \frac{\frac{x^4}{4}}{\frac{4}{1}} \qquad \frac{x^4}{16}$$

Comprobación

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2}$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{x^4}{16}} = \frac{x^2}{2}$$

$$2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$0 = \frac{(0)^4}{16} + C$$

$$0 = 0$$

$$y = \frac{x^4}{16} + 0 = \frac{x^4}{16}$$

20 / Sep / 2022

$4\frac{dx}{dy} = 5x \Rightarrow dy = \frac{1}{5x}dx$ $\quad \cancel{\int} dy = \int 5x\,dx$ $\quad \cancel{\int \frac{1}{5x}dx}$ $\quad \int \frac{dx}{5x} = \frac{1}{5}\int \frac{1dx}{x}$

$y = \int 5x\,dx$ $\quad y = \ln|5x|$ $\quad \frac{1}{5}\ln(x)dx$

$y = \frac{5x^2}{2}$

Apunte Ecuaciones Homogéneas

$y \cdot x v$

$y' = x' \cdot v + v' \cdot x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$

$f(tx,ty) = f(x,y)$

$\frac{tx^2+ty^2}{t(xy)} = \frac{tx^2+ty^2}{tx\,ty} = \frac{\cancel{t^2}(x^2+y^2)}{\cancel{t^2}(xy)} = \frac{x^2+y^2}{xy}$

$\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} = \frac{1+\frac{y^2}{x}}{\frac{y}{x}} \Bigg\} \frac{1+\frac{y^2}{x}}{\frac{y}{x}}$

$v = \frac{y}{x} \quad y = vx$

$f'(x \cdot g) = f'(x) \cdot g + F(g) \cdot x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{\frac{vx}{x}} = \frac{1+v^2}{\frac{y}{x}} = \frac{1+v^2}{v} \rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{v} + v \; ; \; x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$

$v\,dv = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int v\,dv = \int \frac{1}{x}dx$

$\frac{v^2}{2} = \ln|x| + c \Rightarrow v^2 = \frac{\ln|x| + c}{2} = \int$

$\int f+g = \int f + \int g$

$1: (e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)dy$

$\hookrightarrow F(x,y)$

$$\int N dy = \int 2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y\,dy$$

$$\hookrightarrow \int 2xe^{2y} - \int x\cos(xy) + \int 2y\,dy$$

$$2x\int e^{2y} - x\int\cos(xy) + 2\int y\,dy$$

$$2x\tfrac{1}{2}e^{2y} - \sin(xy) + y^2$$

$$\hookrightarrow y^2 - \sin(xy) + xe^{2y} + C$$

$$\hookrightarrow y^2 - \sin(xy) + xe^{2y} + n(x)$$

n(x) Derivar

$$0 - \cos(xy)y + e^{2y} + n'(x)$$

$$e^{2y} - y\cos(xy) = -\cos(xy)y + e^{2y} + n'(x)$$

x

$$\cancel{e^{2y}} - y\cancel{\cos(xy)} - (\cancel{e^{2y}} - y\cancel{\cos(xy)}) = -\cancel{y\cos(xy) + e^{2y}} + n'(x) - (\cancel{e^{2y}} - y\cancel{\cos(xy)})$$

$$n'(x) = 0 \rightarrow n(x) = \int 0\,dx$$

$$\int 0\,dx = c_1$$

$$n(x) = c_1$$

$$F(x,y) = (y^2 - \sin(xy) + xe^{2y} + c_1) = c_2$$

$$y^2 - \sin(xy) + xe^{2y} = c_1$$

2: $(\text{Sen}\,y - \text{Sen}\,x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$

$\int M\,dx = \int (\text{sen}\,y - \text{sen}\,x)\,dx$

↳ $\int \sin y - \int \sin x\,dx$

$(\sin y)x + \cos x + C \rightarrow \sin(y) + \cos x + n(x)$

$n(x)$

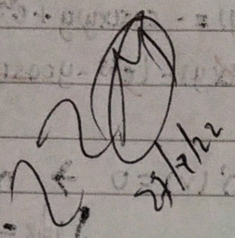
$0 + (-\sin x) \rightarrow -\sin(x) + n'(x)$

$-\sin(x) + n'(x) = \cos x + x\cos y - y$

$n'(x) = \cos x + \cos y - y + \text{sen}(x)$

$\int n'(x) = \int \cos x + \cos y - y + \sin(x)$

$n(x) = \int \cos x \int x + \int \cos y - \int y$



$f(x) = \sin(x) + \cancel{\cos(y)x - \int y} + C$

$\sin(x) + \frac{x^2}{2} = 6$

12 / Sep / 2022

$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y = xe^x$

$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{d}{dx}(f) \cdot g + f \cdot \frac{d}{dx}(g)$

$y' = \frac{d}{dy}(xe^x)$

$y' = \frac{d}{dx}(x)e^x + x\frac{d}{dx}(e^x)$

$y' = 1e^x + xe^x$

$y' = e^x + xe^x$

7 A 13/9/22

$y'' = e^x + 1e^x + xe^x$

$y'' = 2e^x + xe^x$

$y'' - 2y' + y = 0$

$(2e^x + xe^x) + (-2(e^x + xe^x)) + xe^x = 0$

$\cancel{2e^x} + \cancel{xe^x} + (\cancel{-2e^x} - 2xe^x) + \cancel{xe^x} = 0$

Si es solución

13 / Sep / 2022

$y = 5e^{2x} \qquad y'' - y' = 2y$

$2y' + y = 0 \qquad y = e^{-x/2}$

$\frac{dy}{dt} + 20y = 24 \qquad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

$y'' - 6y' + 13y = 0 \qquad y = e^{3x}\cos 2x$

$de^u = du \cdot e^u$

$d\operatorname{sen} u = \cos u\, du$

$d\cos u = -\operatorname{sen} u\, du$

$duv = uv' + vu'$

13 / Sep / 2022

$y = 5e^{2x}$ $\quad y'' - y' = 2y$

$y' = 2 \cdot 5e^{2x} = 10e^{2x}$

$y'' = 2 \cdot 10e^{2x} = 20e^{2x}$

$2y = 10e^{2x}$

$y'' - y' = 2y$

$\hookrightarrow 20e^{2x} - 10e^{2x} = 10e^{2x}$

$10e^{2x} = 10e^{2x}$ ✓

= Si es solucion ✓

$y = e^{-\frac{x}{2}}$ $\quad 2y' + y = 0$

$y' = -1 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$y' = +e^{\frac{x}{2}}$

$2y' + y = 0$

$\hookrightarrow +2e^{-\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = 3e^{-\frac{x}{2}}$

= No es solución

$y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ $\quad \frac{dy}{dt} + 20y = 24$

$y' = -20 \cdot \frac{6}{5}e^{-20t}$

$y' = \frac{120}{5}e^{-20t}$

$20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = \frac{120}{5} - \frac{120}{5}e^{-20t} = 24$

$\frac{120}{5} + \frac{120}{5}e^{+20t} + \left(-\frac{120}{5}e^{-20t}\right) = 24$

$\frac{120}{5} = 24$

= Si es solucion

11 13/9/22

$y = e^{3x}\cos 2x \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$

$y' = \frac{dy}{dx} e^{3x} + \frac{dy}{dx}\cos(2x)$

$y' = 3 \cdot e^{3x} + -\operatorname{Sen}(2x) \cdot 2$

$y' = 3e^{3x} - 2\operatorname{Sen}(2x)$

$y'' = 3 \cdot 3e^{3x} - 2\cos(2x) \cdot 2$

$y'' = 9e^{3x} - 4\cos(2x)$

$y'' - 6y' + 13y = 0$

14/9/22

$9e^{3x} - 4\cos(2x) - 6(3e^{3x} - 2\operatorname{sen}(2x)) + 13(e^{3x}\cos 2x) = 0$

$9e^{3x} - 4\cos(2x) - 18e^{3x} - 12\operatorname{sen}(2x) + 13e^{3x}\cos 2x = 0$

$-9e^{3x} - 9\cos(2x) + 12\operatorname{sen}(2x) + 13e^{3x} = 0$

$4e^{3x} - 9\cos(2x) + 12\operatorname{sen}(2x) \neq 0$

CONCLUSION: No es solución

LISTA DE COTEJO PARA EJERCICIOS

U1 ECUACIONES DIFERENCIALES

Nombre del estudiante: Barrios Ortiz Manuel Omar.

Tema: UNIDAD 1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Portada	10%	5%
Solución del ejercicio	10%	10%
Explicación del procedimiento o desarrollo	10%	10%
Cumplimiento en tiempo y forma de la entrega	10%	10%
Total	30%	25%

Observación: La hoja de presentación tiene mal escrito el apellido del docente

INVESTIGACIONES UNIDAD 1

Ecuaciones Diferenciales

Docente: Dr. Josué Ángel Nieves Robles
Alumno: Barrios Ortiz Manuel Omar
Grupo 411-A

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA
INGENIERÍA MECATÓNICA

UNIDAD 1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1.1 Teoría preliminar.

1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)

1.1.2 Soluciones de las ecuaciones diferenciales.

1.1.3 Problema de valor inicial.

1.1.4 Teorema de existencia y unicidad.

1.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.2.1 Variables separables y reducibles.

1.2.2 Homogéneas.

1.2.3 Exactas.

1.2.4 Lineales.

1.2.5 De Bernoulli.

1.3 Aplicaciones.

6 / Sep / 2022

Ecuaciones Diferenciales

Ecuación Diferencial

Es una ecuación donde intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se derivan, se dividen en:

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**
  Contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.

- **Ecuaciones en derivadas parciales**
  Contienen derivadas respecto a dos o más parciales.

3 A 8/2/22

Este tipo de ecuaciones incluye expresiones o términos que involucran una función matemática incógnita y sus derivadas. Algunos ejemplos pueden ser:

$$y' = 2xy + 1$$

Ecuación Ordinaria donde y representa la función no especificada de la variable independiente x, es decir $y = f(x)$, $y' \; \frac{dy}{dx}$ → es la derivada de y con respecto a x.

La expresión $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida)

La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (La transformada de La'place)

Derivar respecto a $\bar{?}$
↳ independiente

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Solución: Es una función f definida en un intervalo δ que tiene al menos n derivadas continuas en δ y que al sustituirlas en la ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduce la ecuación a la identidad.

Una función f es solución si:

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

para toda $x \in \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$

El intervalo de solución δ es el <u>dominio de la solución</u> y puede ser un intervalo abierto (a,b) o puede ser un intervalo cerrado $[a,b]$, un intervalo infinito $(a-\infty)$

Si la función f es $=0$, es solución de una ecuación diferencial en un intervalo δ, decimos que f es una <u>solución trivial</u>

$\hookrightarrow$ $f(x) = y = \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow$ $x\frac{dy}{dx} + y = 0$

consideramos la función $y = \frac{1}{x}$ para toda $x \neq 0$. La derivada es

$\hookrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

Para toda función $x \neq 0$. Sustituye

$$x\frac{dy}{dx} + y = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$
$$= 0$$

▶ Curva de una Solución

La gráfica de una solución $f(x)$ de una ecuación diferencial ordinaria se llama curva de solución.

Si $f(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, entonces $f(x)$ es derivable, lo que también significa que es continua con su intervalo de definición δ, esto es necesario para ser solución y no siempre va a ocurrir para todo el dominio de la función f.

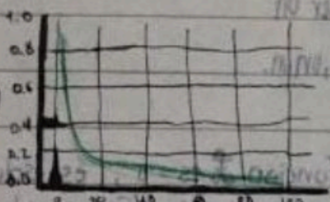
Puede haber diferencia entre la gráfica de la función $f(x)$ y la gráfica de la solución $f(x)$.

↳ $y = \frac{1}{y}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{0\}$

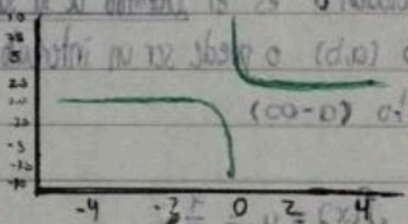
↳ $\delta = (-\infty, -1)$, $\delta = (5, 100)$ o $\delta = (1, \infty)$

El intervalo de la función no necesita ser igual al dominio de la función $f(x)$.

$\delta = (1, 100)$



$y = \frac{1}{x}$



Comprobar la función

$$f(x) = y = \frac{4}{4 - x^2}$$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Problemas de Valor Inicial

Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria que tiene un pre-requisito inicial sujeto a la misma. Este prerequisito es la salida de la función indefinida para algún valor que se encuentre dentro del dominio de la ecuacion diferencial dada.

Expresada como

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Los problemas de valor inicial ayudan a determinar una respuesta exclusiva a partir de las múltiples respuestas posibles para la ecuación dada.
Sin embargo, aunque es posible establecer una serie de prerequisitos iniciales para una ecuación diferencial en particular y solo unos pocos de ellos nos llevarían a una respuesta exclusiva para el problema dado.

09/4/22

Scribe

Teorema de existencia y Unidad

Son 3 casos donde se pueden presentar soluciones son:

1: Una Solución Única (la solución está dentro de los límites de existencia y unicidad)

2: Una Infinidad de Soluciones

3: Ninguna Solución

13 1/2

Forma General De Una Ecuación General de Primer Orden

$$a_1(x)\frac{dx}{dy} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$f(x,y) = -P(x)y + f(x)$$

Supongase que tanto la función $f(x,y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en algún rectángulo R en el plano xy que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \; y(x_0) = y_0$$

20 Sep /2022

Ecuaciones Ordinarias

Ecuacion Diferencial Ordinaria

Es la ecuación que liga la variable independiente x, una función $y = g(x)$ (que depende de la variable independiente) y sus respectivas derivadas y', y'', y''' …, es decir, una expresión de la forma

$$F(x, y, y', y'' \dots {}^{n}) = 0$$

Función $y = y(x)$ = Función incógnita

EDO de Primer orden

Comprenden $F(x, y, y') = 0 \rightarrow$ Implícita

Despejando y =

$$y' = f(x, y) \rightarrow \text{Forma Explícita}$$

SOLUCIONES

1- Solución General → Tantas ecuaciones arbitrarias como orden de la ecuación. Familia de curvas en forma $\Phi(x, y, c) = 0 \rightarrow c$ = Constante arbitraria

2- Solución Particular → Se obtiene al fijar los valores de las constantes arbitrarias de la solución general.

3- Solución Singular → Una solución que no está incluida en la solución general

Variables Separables y reducibles

EDO de primer orden $y' = F(x,y)$

de variables separables si:

$$F(x,y) = f(x) \cdot g(x)$$

puede resolverse usando:

- Procedimiento (Variables Separables)
- Entrada (en EDO_{PO})
- Salida (La solución de la ED)

22/9/22

① Factorizar el segundo miembro

$F(x)(y) = F(x) \cdot g(y)$ → Si no es factorizable, no se continúa con el proceso

② Separar las variables

$$y' = F(x,y)$$
$$= f(x) \cdot g(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)}, \frac{dy}{dx} = f(x)$$

③ Integrar la expresión

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx$$
$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

$\frac{dy}{dx} = 3x + 4y + 5 \Rightarrow du = (3+4u)dx$

$(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$

dx dx dx dy dy

$dx - x^2y(ydx + xdy) - x(ydx + xdy) = 0$

$u = xy$
$du = ydx + xdy$

$dx - xudu - xdu = 0$

$\frac{dx}{x} = (u+1)\,du \quad \ln|x| = \frac{1}{2}u^2 + u + c$

$dx + dy = \quad u = x + y$

$xdx + ydy = \quad u = x^2 + y^2$

$xdx - ydy = \quad u = x^2 - y^2$

$xdy + ydx = \quad u = xy$

$xdy - ydx = \quad u = \frac{y}{x}$

$f(ax + by + c) = \quad u = ax + by + c$

Scribe

21 Sep 2022

Ecuaciones Homogéneas:

El conjunto de sus soluciones es un espacio vectorial

Estas ecuaciones se pueden escribir como una combinación lineal de las primeras potencias de la incógnita y sus derivadas igualadas a 0

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots a_{n1} \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

En donde los coeficientes a_i pueden ser funciones de x.

Históricamente, se motivó a denominarlas **Homogéneas** debido a que todos sus términos son de primer grado.

Una función

$f(x,y)$ se llama homogénea de grado n si

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

para cualquier número real t.

$\hookrightarrow f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 f(x,y)$

$\hookrightarrow f(x,y)$ es homogénea de grado 2.

$$g(x,y) = \ln(y/x)$$

$$g(tx, ty) = \ln\left(\frac{ty}{tx}\right) = \ln\left(\frac{y}{x}\right) = t^0 g(x,y)$$

$g(x,y)$ es homogénea de grado 0

23/ Sep /2022

Ecuaciones Exactas

Sean

$P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones reales continuas en un dominio D. Se dice que la ecuación:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Es la ecuación diferencial exacta si existe una función real $F(x,y)$ tal que el dominio D cumple

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

La función $F(x,y)$ es una primitiva de la ecuación y la integral general es:

$$F(x,y) = cte$$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\Psi = \int M dx + h(y)$

$\Psi_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx + h'y$ $\quad \Psi_y = N$

TEOREMA:

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ sea diferencial exacta en un dominio D, siendo $P(x,y)$, $Q(x,y)$ y sus derivadas parciales continuas en D, es que se cumpla:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

23/9/22

Ejemplos:

$$e^x(y^3 + xy^3 + 1)\,dx + 3y^2(xe^x - 6)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x(3y^2 + 3y^2x) = e^x 3y^2(1+x)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2(e^x + xe^x) = e^x 3y^2(1+x)$$

Resolución

$$Q(x,y) = 3y^2(xe^x - 6)\,dy \Rightarrow \alpha'(y) = -18y^2 \Rightarrow \alpha(y) = -6y^3 + cte$$

INTEGRAL GENERAL

$$F((x,y)) = e^x(xy^3+1) - 6y^3 + cte$$

$\hookrightarrow e^x(xy^3+1) - 6y^3 = K$

24 / Sep / 2022

EDO Lineales

Ecuación en forma:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

donde a y b son funciones continuas

Ejemplo ⇒ $y' = 5x^2 \cdot y + 2x^2$

También se pueden obtener después de una transformación

↳ $\dfrac{y'}{5x^2} = y + \dfrac{2}{5} \rightarrow \left(\dfrac{y'}{5x^2}\right) = \left(y + \dfrac{2}{5}\right) 5x^2 = y' = \dfrac{5x^2}{1} y + \dfrac{2}{5} x^2 = \dfrac{10x^2}{5x^2} = 2x^2 + y \cdot 5x^2$

En el caso particular de que $b(x) = 0$, la ecuación será homogénea

Resolución

1. Resolver la ecuación homogénea $\quad \left.y_h' = a(x) \cdot y_h\right\}$ ecuación separable

$$y_h(x) = k \cdot e^{\int a(x)\,dx}$$

$\left.(1+x^2)y' + xy = 0\right\}$ lineal homogénea

↳ $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{x}{1+x^2}$ = [illegible] = [illegible] $\ln|y| = 1 \cdot \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$

Ejem 2

$\operatorname{arctg}(x) y' + \dfrac{1}{1+x^2} y = \operatorname{arctg}^2(x)$

↳ $y = u(x) \operatorname{arctg}^2(x) \Rightarrow$ calcular $u(x)$ se sustituye en la ecuación

6 / Sep / 2022

Orden de la ecuacion

El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial se denomina orden de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \rightarrow \text{2do Orden}$$

$$y''' + y'' + y' + y = \text{sen}\, 5x \quad \rightarrow \text{3 Orden}$$

$$(x+y)\,dx = (y-x)\,dy \quad \rightarrow \text{1 Orden}$$

$$y' = 3((y'')^2) + 5y - 3x + 2 = \quad \rightarrow \text{2do Orden}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} \quad \rightarrow \text{4to Orden}$$

Grado de la ecuación

Es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuacion siempre y cuando la ecuacion esté en forma polinómica, de no ser así, se considera que no tiene grado.

$$e^x\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen}\,x\frac{dy}{dx} = x \quad \rightarrow \text{2do Orden, 1mer Grado}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0 \quad \rightarrow \text{3cer Orden, 2do Grado}$$

Linealidad

Se dice que una ecuacion es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

- Ni función ni derivada elevada $\neq 1, 0$
- Combinación lineal de sus soluciones es tambien una solución.

25 Sep 2022

Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

$$\frac{dx}{dy} + P(x)y = f(x)y^n$$

Son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de 1mer Orden no homogéneas, y la solución de este tipo de ecuaciones se puede calcular usando el factor integrante.

Si la eo está expresada de forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y$, se puede reescribir como una EDO Lineal de primer órden homogénea $\frac{dy}{dx} + (P(x) - f(x))y = 0$ y en consecuencia se puede calcular su solución separando las variables.

Una Ecuación de Bernoulli es una EDO no Lineal para cualquier número n expresado de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Los casos para los cuales $n = 0$ y $n = 1$

↳ $u = y^{1-n}$

Ejemplo 1

$$3x\frac{dy}{dx} + 6y = 12xy^2$$

↳ estandarizar la ecuación ⇒ $\frac{3x\frac{dy}{dx} + 6y = 12xy^2}{3x} = \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 4y^2$

↳ utilizar $u = y^{1-n} \to n = 2$

↳ $y = u^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4y^2 \to \left((-u)^{-2}\frac{du}{dx}\right) + \frac{2}{x}(u^{-1}) = 4(u^{-1})^2$$

↳ $-u^{-2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u^{-1} = 4u^{-2} \Rightarrow / (-u^{-2}) \Rightarrow \frac{du}{dx} + \left(-\frac{2}{x}\right) = -4$ → identificar $P(x)$

$$P(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow p(x) = e^{\int -\frac{2}{x}} = x^{-2}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -4 \Rightarrow x^{-2}\frac{du}{dx} - x^{-2}\frac{2}{x}u = -4x^{-2} \to \int \frac{x^{-2}u}{dx} = \int -4x^{-2}$$

$$u = 4x + Cx^2$$

* $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

LISTA DE COTEJO INVESTIGACION

U1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

de primer orden.

Nombre del estudiante: BARRIOS ORTIZ MANUEL OMAR.

Tema: Los correspondientes a la unidad 1.

Portada	2%	0%
Introducción	5%	5%
Desarrollo	15%	15%
Conclusiones	5%	5%
Referencias	1%	1%
Entrega en tiempo y forma	2%	2%
Total	30%	28%

Observación: la hoja de presentación tiene mal escrito el apellido del docente.

CICLO ESCOLAR SEPTIEMBRE 2022 ENERO 2023
ECUACIONES DIFERENCIALES
EXAMEN UNIDAD I

ITSSAT

Alumno (a): ____________________ APELLIDO PATERNO APELLIDO MATERNO NOMBRE(S)		**CALIFICACION**
Docente: Prof. José Angel Nieves Vázquez	**Fecha**: ___/_________/2022	**de 40%**
1. Utiliza lápiz para resolver y **la respuesta con pluma.** 2. Al que sea sorprendido copiando reprueba la unidad		

1. En cada problema determine el orden y determine si son o no lineales las siguientes ED.

a. $t^2y'' + ty' + 2y = sin(t)$
b. $(1 + y^2)y'' + ty' + y = e^t$
c. $y + ty^2 = 0$

2. Determinar si la función dada es solución de la ED.

a. $y'' + 4y = 0$; $y(x) = c_1 sen(2x) + c_2 cos(2x)$
b. $y'' - 2y' + y = 0$; $y = xe^x$
c. $2y' + y = 0$; $y = e^{-x/2}$
d. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$; $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

3. Resolver las siguientes ED utilizando el método de variables separables

$$a)(x+1)\frac{dy}{dx} = x$$

$$b)\frac{dx}{dy} = 5x$$

4. Determinar si las siguientes ED son exactas

$$1)2xydx + (x^2+1)dy = 0$$

$$2)(e^{2y} - ycos(xy))dx + (2xe^{2y} - xcos(\; y) + 2y)dy = 0$$

$$3)(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$$

$de^u = du * e^u$; $dsenu = cosudu$; $dcosu = -senudu$;
$duv = uv' + vu'$