INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II GRUPO 501 A

LISTA DE COTEJO: TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE: SAN ANDRÉS TUXTLA	**ASIGNATURA:** INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II	**GRUPO:** 501 A
NOMBRE DEL DOCENTE: ARMANDO ALVARADO ALVARADO	**FECHA:** 23/06/2023	
NOMBRE DE (LOS) ALUMNOS (S): **JOSÉ ANGEL GOXCON SOSA**	**UNIDAD: 4** **TEMA: CADENAS DE MARKOV**	

INSTRUCCIÓN

Revisar los documentos o actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia a evaluar se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" ocúpela cuando tenga que hacer comentarios referentes a lo observado.

VALOR DEL REACTIVO % PLANEADO	**CRACTERÍSTICAS A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**			**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	**% REAL**	
3%	**Portada:** Nombre de la escuela (logotipo), Carrera, Asignatura, Nombre del Profesor, Nombre de Alumno, Grupo, Lugar y fecha de entrega.	+		**3%**	
12%	**Especificaciones.** Los conceptos deben ser coherentes al tema de análisis. Ejemplos de cada tema.	+		**12%**	
2%	**Ortografía:** Enunciados coherentes, palabras legibles y sin errores ortográficos.	+		**2%**	
3%	**Fecha de entrega**: La indicada en clases.	+		**3%**	
20%	**Calificación.**			**20%**	

LISTA DE COTEJO: PROBLEMARIO.

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE: SAN ANDRÉS TUXTLA	**ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II**	**GRUPO: 501 A**
NOMBRE DEL DOCENTE: ARMANDO ALVARADO ALVARADO.	**FECHA:** 23/06/2023	
NOMBRE DE (LOS) ALUMNOS (S): **JOSÉ ANGEL GOXCON SOSA**	**UNIDAD: 4** **TEMA: CADENAS DE MARKOV**	
INSTRUCCIÓN		
Revisar los documentos o actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia a evaluar se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” ocúpela cuando tenga que hacer comentarios referentes a lo observado.		

VALOR DEL REACTIVO % PLANEADO	CRACTERÍSTICAS A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE			OBSERVACIONES
		SI	NO	% REAL	
2%	**Portada:** Nombre de la escuela, Carrera, Asignatura, Nombre del Profesor, Nombre de Alumno, Grupo, Lugar y fecha de entrega.	+		2%	
12%	**Especificaciones.** Los problemas se deben resolver de acuerdo a los procedimientos analizados en clases para que sean correctos de lo contrario la calificación será proporcional.	+		12%	
3%	**Presentación: limpieza y formalidad**	+		3%	
3%	**Fecha de entrega**: La indicada en clases.	+		3%	
20%	**Calificación.**			20%	

LISTA DE COTEJO: LIBRETA DE APUNTES.

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE: SAN ANDRÉS TUXTLA	**ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II**	**GRUPO: 501 A**
NOMBRE DEL DOCENTE: ARMANDO ALVARADO ALVARADO.	**FECHA:** 23/06/2023	
NOMBRE DE (LOS) ALUMNOS (S): **JOSÉ ANGEL GOXCON SOSA**	**UNIDAD: 4** **TEMA: CADENAS DE MARKOV**	

INSTRUCCIÓN

Revisar los documentos o actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia a evaluar se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” ocúpela cuando tenga que hacer comentarios referentes a lo observado.

VALOR DEL REACTIVO % PLANEADO	CRACTERÍSTICAS A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE			OBSERVACIONES
		SI	NO	% REAL	
2%	**Portada:** Nombre de la escuela, Carrera, Asignatura, Nombre del Profesor, Nombre de Alumno, Grupo, Lugar y fecha de entrega.	+		**2%**	
12%	**Especificaciones.** Los ejemplos analizados en clases deben contener los procedimientos necesarios para comprender los temas.	+		**12%**	
3%	**Presentación:** limpieza y formalidad.	+		**3%**	
3%	**Fecha de entrega**: La indicada en clases.	+		**3%**	
20%	**Calificación.**			**20%**	

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN 4 (20%).

INSTITUO TECNOLÓGICO
SUPERIOR DE SAN ANDRÉS
TUXTLA

ITSSAT

INGENIERIA INDUSTRIAL. 501 A

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

DOCENTE: M.I.I. ARMANDO ALVARADO ALVARADO

TEMA: INTRODUCCIÓN A LAS CADENAS DE MARKOV

ALUMNO: JOSE ANGEL GOXCON SOSA

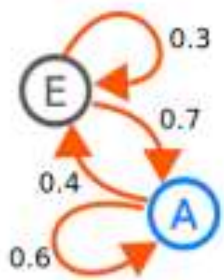
FECHA: 17/06/2023

¿Qué es una cadena de Markov?

La explicación de estas cadenas la desarrolló el matemático de origen ruso Andréi Márkov en 1907. Así, a lo largo del siglo XX, se ha podido emplear dicha metodología en numerosos casos prácticos de la vida cotidiana.

La explicación de estas cadenas la desarrolló el matemático de origen ruso Andréi Márkov en 1907. Así, a lo largo del siglo XX, se ha podido emplear dicha metodología en numerosos casos prácticos de la vida cotidiana.

También se conoce como cadena simple biestable de Markov.



Según señaló Markov, en sistemas o procesos estocásticos (es decir, aleatorios) que presentan un estado presente es posible conocer sus antecedentes o desarrollo histórico. Por lo tanto, es factible establecer una descripción de la probabilidad futura de los mismos.

Más formalmente, la definición supone que en procesos estocásticos la probabilidad de que algo suceda solamente depende del pasado histórico de la realidad que estamos estudiando. Por este motivo, a menudo se dice que estas cadenas cuentan con memoria.

La base de las cadenas es la conocida como propiedad de Markov, la cual resume lo dicho anteriormente en la siguiente regla: lo que la cadena experimente en un momento t + 1 solamente depende de lo acontecido en el momento t (el inmediatamente anterior).

¿Dónde se utiliza la cadena de Markov?

Las cadenas de Markov han experimentado una importante aplicación real en el ámbito de los negocios y las finanzas. Esto, al permitir, como se ha señalado, analizar y estimar futuros patrones de conducta de los individuos atendiendo a la experiencia y los resultados anteriores.

Lo anterior puede reflejarse en diferentes campos como la morosidad, el estudio de las conductas de consumidores, la demanda estacional de mano de obra, entre otros. El sistema elaborado por Markov es bastante sencillo y cuenta, como hemos dicho, con una aplicación práctica bastante fácil. Sin embargo, muchas voces críticas señalan que un modelo tan simplificado no puede ser totalmente efectivo en procesos complejos.

Probabilidades y matriz de transición

La probabilidad de ir del estado i al estado j en n unidades de tiempo está dada por:

$$P_{ij}^{(n)} = Pr\,(X_n = j \mid X_0 = i)$$

En la probabilidad de transición, en un paso, se omite el superíndice y de esta forma se obtiene:

$$P_{ij} = Pr\,(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Las probabilidades de transición en n pasos satisfacen la ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir, para cualquier k tal que $0 < k < n$ se cumple que:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in E} P_{ir}^{(k)} \, P_{rj}^{(n-k)}$$

Donde E denota el espacio de estados.

Cuando la cadena de Markov es homogénea, muchas de sus propiedades se pueden obtener a través de su matriz de transición, definida, entrada a entrada, como:

$$A_{i,j} = P_{ij}$$

En donde la entrada i, j corresponde a la probabilidad de ir del estado i a j en un paso.

De la misma manera se puede obtener la matriz de transición en n pasos como:

$$A_{i,j}^{(n)} = P_{ij}^{(n)}\text{, donde } P_{ij}^{(n)} = P\,(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Una matriz de transición para una cadena de Markov de n estados es una matriz de n X n con todos los registros no negativos y con la propiedad adicional de que la suma de los registros de cada columna (o fila) es 1.

Los P_{ij} se agrupan en la matriz de transición de la cadena de Markov, de tal forma que:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = (P_{ij})\ i,j \in S$$

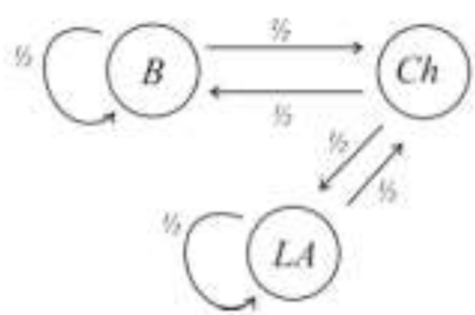
Ejemplo 1

Las siguientes matrices son de transición.

$$\begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 & 0.00 \\ 0.18 & 0.75 & 0.16 \\ 0.02 & 0.05 & 0.84 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.50 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Una cadena de Marvok es un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados en cual la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior con unas probabilidades que están fijas. Para motivar este concepto exploremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Supongamos que hay tres centros principales de camiones de una empresa. Cada mes, la mitad de los que están en Boston y en Los Angeles, van a Chicago, la otra mitad permanece donde está y los camiones de Chicago se dividen igualmente entre Boston y L.A. Lo anterior se puede resumir con la siguiente figura:



Si inicialmente la compañía tenía 100,200100,200 y 300300 camiones en Boston, Chicago y L.A. respectivamente, encontrar la distribuciones de camiones después de un mes y después de dos meses en las tres ciudades.

Solución: Denotemos por a_k, b_k y c_k la cantidad de camiones en Boston, Chicago y L.A. respectivamente, después de k meses. Utilizando la información dada se tiene que después de un mes, la distribución de los camiones será:

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 = 50 + 100 = 150,$$
$$b_1 = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}c_0 = 50 + 150 = 200,$$
$$c_1 = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}c_0 = 100 + 150 = 250.$$

Y después de 2 meses, vemos que la distribución será:

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = 75 + 100 = 175,$$
$$b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}c_1 = 75 + 125 = 200,$$
$$c_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}c_1 = 100 + 125 = 225.$$

Los cálculos de este ejemplo se pueden realizar de manera más conveniente si utilizamos notación matricial. Para ver esto, denotemos por x_k al vector de probabilidades en el k-ésimo mes, es decir, denotemos $x_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}$. El cálculo realizado para el primer mes se puede realizar de la siguiente manera:

$$x_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

En otras palabras, si

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

entonces la anterior ecuación se puede escribir de la forma $x_1 = Px_0$. De manera similar, $x_2 = Px_1 = P^2x_0$. En general, después de k meses la distribución satisface que $x_k = Px_{k-1} = P^2x_{k-2} = \cdots P^kx_0$.

En general una cadena de Markov finita es un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados que usualmente se denotan como estado 1, estado 2, ..., estado n. En cada paso o punto en el tiempo el proceso puede estar en cualquiera de los estados y puede cambiar de estado mediante unas probabilidades fijas llamadas probabilidades de transición.
Para cada tiempo k definamos el vector x_k como el vector de probabilidades de estar en los distintos estados en el tiempo k, es decir,

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{bmatrix},$$

donde $x_{k,i}$ denota la probabilidad de estar en el estado i-ésimo en el tiempo k. Los vectores x_k son vectores de probabilidad, esto significa que $x_{k,i} \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y además $x_{k,1} + x_{k,2} + \cdots + x_{k,n} = 1$. Denotemos a p_{ij} la probabilidad de pasar del estado j-ésimo al estado i-ésimo, estas probabilidades son las entradas de una matriz P que se llamará la matriz de transición de la cadena de Markov. La matriz P tiene la propiedad que la suma de las entradas de cada columna es 1, es decir, los vectores columna de P son vectores de probabilidad. La regla fundamental en un proceso de Markov nos dice que el vector de probabilidades x_k está dado por

$$x_k = P^kx_0.$$

Por lo tanto si conocemos la matriz de transición P y el vector de estados iniciales x_0, entonces utilizando la regla anterior podemos encontrar el vector de probabilidades para cualquier tiempo.
En el ejemplo anterior

Comportamiento a largo plazo

Un aspecto interesante en una cadena de Markov es su comportamiento a largo plazo. Intuitivamente, el comportamiento a largo plazo en una cadena de Markov (en caso que este exista), es un vector de probabilidades x que nos indica las probabilidades de estar en cada uno de los estados después un número grande de repeticiones. De manera formal, el comportamiento a largo plazo en una cadena de Markov (en caso que este exista) se define como:

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k$$

Nota: Existen cadenas de Markov que no tienen comportamiento a largo plazo definido. Sin embargo, existen condiciones que garantizan que una cadena de Markov tenga comportamiento a largo plazo bien definido, por ejemplo, si la matriz de transición P tiene todas sus entradas estrictamente positivas se puede demostrar que la cadena de Markov tiene un comportamiento a largo plazo que está bien definido y este comportamiento a largo plazo es único.

Definición: Supongamos que tenemos una cadena de Markov con matriz de transición P. Decimos que un vector x es un vector estacionario si x es un vector de probabilidad, es decir, si sus entradas son mayores o iguales a cero y suman 1 y además $Px = x$.

Notemos que si x es un vector estacionario, entonces $Px = x$, esto significa que x es un vector propio de P asociado al valor propio $\lambda = 1$. En otras palabras, un vector estacionario es un vector propio de P asociado al valor propio $\lambda = 1$ que también es un vector de probabilidad.

Teorema: Si una cadena de Markov tiene comportamiento a largo plazo definido, entonces ese comportamiento a largo plazo es un vector estacionario.

Ejemplo: Consideremos el vector estacionario para el ejemplo de los camiones. Se puede demostrar que en este caso hay un comportamiento a largo plazo bien definido y por lo tanto el comportamiento a largo plazo está dado por el vector estacionario. Calculemos este comportamiento a largo plazo. En este ejemplo la matriz de transición está dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ y } x_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

Calculemos primero el espacio propio de P asociado al valor propio $\lambda = 1$. Por definición $E_1 = Nul(P - I)$. Reduciendo la matriz $P - I$ obtenemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ así que E_1 contiene los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}$ donde z es una variable libre. Por lo tanto $E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Por definición un vector estacionario $\mathbf{x}$ es un vector en E_1 que además $\mathbf{x}$ es un vector de probabilidad y por lo tanto $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}$ con $z + z + z = 1$, de donde $z = \frac{1}{3}$. Luego

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, es decir, la probabilidad de que a largo plazo, un camión cualquiera de la empresa se encuentre en una determinada ciudad es $\frac{1}{3}$.

Ejemplo

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades: Bucaramanga, Cali y Pereira. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y al día siguiente se desplaza a otra ciudad, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en Pereira, la probabilidad de tener que seguir trabajando allí al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a Cali es 0.4 y la de tener que ir a Bucaramanga es 0.2. Si el viajante duerme un día en Cali, con probabilidad de un 20%, tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente; en el 60% de los casos viajará a Pereira, mientras que irá a Bucaramanga con probabilidad de 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo un día en Bucaramanga, permanecerá en esa misma ciudad al día siguiente con una probabilidad de 0.1, irá a Cali con una probabilidad de 0.3 y a Pereira con una probabilidad de 0.6.

a) Si hoy el viajante está en Pereira, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en el mismo lugar al cabo de cuatro días?
b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

Solución:
La matriz de transición P es la siguiente para el orden Bucaramanga, Cali y Pereira.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Para solucionar la primera pregunta se debe averiguar el término P^4_{33}, es decir, el término que ocupa la tercera fila y la tercera columna de la matriz P^4, lo cual se obtiene con la fila 3 y columna 3 de P^2, cuyos valores son:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^2 * P^2 = \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19/100 & 33/100 & 12/25 \\ 9/50 & 17/50 & 12/25 \\ 9/50 & 3/10 & 13/25 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \frac{9}{50} * \frac{12}{25} + \frac{3}{10} * \frac{12}{25} + \frac{13}{25} * \frac{13}{25} = 0.0864 + 0.1440 + 0.2704 = \mathbf{0.5008}$$

En la segunda pregunta, para hallar las probabilidades estacionarias, se debe proceder de la siguiente manera:

$$(x \quad y \quad z) \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = (x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

Desarrollando resulta el sistema de ecuaciones lineales:

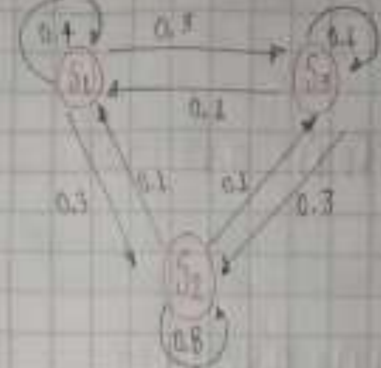
$$\begin{aligned} -9x + 2y + 2x &= 0 \\ 3x - 8y + 4z &= 0 \\ 6x + 6y - 6x &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Se elimina *y* en las dos primeras $-33x + 12x = 0$ y se elimina *y* en las dos últimas: $12z = 6$; de ambas se deduce que $x = 2/11 = 0.1818$; $y = 7/22 = 0.3181$; $z = 0.5$, es decir:

Bucaramanga = 18%
Cali = 32%
Pereira = 50%

PROBLEMARIO (20%)

Calcular las probabilidades del siguiente diagrama de estados



Para el segundo ciclo

$P(S_1) = 0.4\,p_{11} + 0.3\,p_{21} + 0.3\,p_{31}$

$= 0.4(0.4) + 0.3(0.1) + 0.3(0.1)$

$= 0.22$

[illegible]	$P(S_1)$	$P(S_2)$	$P(S_3)$
1	0.4	0.3	0.3
2	0.22	0.45	0.33
3	0.166	0.53	0.304
4	0.15	0.565	0.285
5	0.145	0.58	0.275

$P(S_1) = 0.22(0.4) + 0.45(0.1) + 0.33(0.1)$

$P(S_1) = 0.08 + 0.04 + 0.03$

$= 0.15$

$P(S_3) = 0.166(0.6) + 0.53(0.1) + 0.304(0.1)$
$= 0.09 + 0.05 + 0.03$
$= 0.17$

$P(S_4) = 0.15(0.8) + 0.565(0.1) + 0.285(0.1)$
$= 0.12 + 0.05 + 0.02$
$= 0.19$

$P(S_5) = 0.145(0.4) + 0.5(0.1) + 0.275(0.1)$
$= 0.15 + 0.05 + 0.12$
$= 0.12$

$P(S_1) = 0.4(0.4) + 0.3(0.3) + 0.3(0.3)$
$= 0.16 + 0.09 + 0.09$
$= 0.34$

$P(S_2) = 0.22(0.4) + 0.45(0.3) + 0.33(0.3)$
$= 0.08 + 0.13 + 0.09$
$= 0.30$

$P(S_3) = 0.16(0.6) + 0.53(0.3) + 0.304(0.3)$
$= 0.09 + 0.15 + 0.09$
$= 0.33$

$P(S_4) = 0.15(0.8) + 0.565(0.3) + 0.285(0.3)$
$= 0.12 + 0.16 + 0.08$
$= 0.36$

Dada la cadena de Markov sig.

		A	
		S_1	S_2
De:	S_1	0.6	0.4
	S_2	0.2	0.8

a) Dibuja el diagrama de estados
b) Calcula las probabilidades de transición para los 4 ciclos.

b) $P(S_1) = 0.6(0.2) + 0.4(0.4)$
$= 0.12 + 0.16$
$= 0.28$

$P(S_2) = 0.2(0.2) + 0.8(0.2)$
$= 0.04 + 0.16$
$= 0.20$

$P(S_3) = 0.4(0.8) + 0.6(0.8)$
$= 0.32 + 0.48$
$= 0.8$

$P(S_4) = 0.2(0.8) + 0.8(0.8)$
$= 0.16 + 0.64$
$= 0.8$

LIBRETA DE APUNTES (20%)

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRES TUXTLA

ITSSAT

INGENIERIA INDUSTRIAL. 501-A

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

EJERCICIO CLASE 1: PROBABILIDAD DE TRANSICIONES ESTACIONARIAS DE N PASOS.

DOCENTE: M.I.I. ARMANDO ALVARADO ALVARADO

ALUMNO: JOSE ANGEL GOXCON SOSA

FECHA: 16/06/2023

Probabilidad de transición estacionaria de n pasos

Ejemplo 1. Una tienda de cámaras tiene en almacén un modelo especial de cámara que se puede ordenar cada semana. Sean $D_1, D_2, \ldots$ las demandas de esta cámara durante la primera, segunda, ..., semana respectivamente. Se supone que las D_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución de probabilidad conocida. Sea X_0 el número de cámaras que se tiene en el momento de iniciar el proceso, X_1 el número de cámaras que se tienen al final de la semana 1, X_2 es el número de cámaras al final de la semana 2, etc. Suponga que $X_0 = 3$. El sábado en la noche la tienda hace un pedido que le entregan el lunes en el momento de abrir la tienda. La tienda usa la siguiente política (s, S) para ordenar: si el número de cámaras en inventario al final de la semana es menor que $s=1$ (no hay cámaras en la tienda), ordenar (hasta) $S=3$. De otra manera, no coloca la orden (si se cuenta con una o más cámaras en el almacén, no se hace el pedido). Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda excede el inventario. Entonces $\{X_t\}$ para $t=0,1,\ldots$ es un proceso estocástico de la forma que se acaba de describir. Los estados posibles del proceso son los enteros 0, 1, 2, 3 que representan el número posible de cámaras en inventario al final de la semana.

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix}$$

Así, dado que tiene una cámara al final de una semana, la probabilidad de que no haya cámaras en inventario 2 semanas después es 0.283, es decir $P_{10}^{(2)} = 0.283$.
De igual manera, dado que tienen 2 cámaras al final de una semana, la probabilidad de que haya 3 cámaras en el almacén 2 semanas después es 0.097, esto es $P_{23}^{(2)} = 0.097$.

La matriz de transición de 4 pasos también se puede obtener de la sig. manera:

$$P^{(4)} = P^4 = P^{(2)} * P^{(2)}$$

Así, dado que queda una cámara al final de una semana, 0.282 es la probabilidad que no haya cámaras en inventario 4 semanas más tarde, es decir, $P_{10}^{(4)} = 0.282$. De igual manera, dado que quedan 2 cámaras en el almacén final de una semana, se tiene una probabilidad de 0.171 de que haya 3 cámaras en el almacén 4 semanas después, esto es, $P_{23}^{(4)} = 0.171$.

Ejercicio 2: Una empresa está considerando utilizar Cadenas de Markov para analizar los cambios en las preferencias de los usuarios con 3 marcas distintas de un determinado producto. El estudio ha arrojado la siguiente estimación de la matriz de probabilidades de cambiarse de una marca a otra cada mes:

	1	2	3
1	0.80	0.10	0.10
2	0.03	0.95	0.02
3	0.20	0.05	0.75

Si en la actualidad la participación de mercado es de 45%, 25% y 30%, respectivamente. ¿Cuáles serán las participaciones de mercado de cada marca en 2 meses más?

En primer lugar definimos la v.a. X_n que representa la marca que adquiere un cliente cualquiera en el mes n. Dicha variable aleatoria puede adoptar los valores 1, 2, 3 en el mes $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Adicionalmente conocemos cuál es la distribución inicial y la matriz de probabilidades de transición en una etapa tal como se observa a continuación:

$$f^0 = \begin{bmatrix} P(X_0 = 1) = 0.45 \\ P(X_0 = 2) = 0.25 \\ P(X_0 = 3) = 0.30 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.03 & 0.95 & 0.02 \\ 0.2 & 0.05 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Luego para conocer la distribución de las participaciones de mercado al cabo de 2 meses (2 etapas) podemos utilizar la fórmula $f^n = f^{n-1} \cdot P$

$$f^1 = f^0 P = \begin{bmatrix} P(X_1 = 1) = 0.4275 \\ P(X_1 = 2) = 0.2975 \\ P(X_1 = 3) = 0.2750 \end{bmatrix} \qquad f^2 = f^1 P = \begin{bmatrix} P(X_2 = 1) = 0.4059 \\ P(X_2 = 2) = 0.3391 \\ P(X_2 = 3) = 0.2550 \end{bmatrix}$$

Se concluye que las cuotas de mercado en 2 semanas a cambio de un 45% a un 40.59%; de un 25% a un 33.91% y de un 30% a un 25.50% para las marcas 1, 2 y 3 respectivamente.

EXAMEN 4 (30%)

Estado estable

Ejemplo 1: Supongamos que la industria de refrescos produce solamente 2 refrescos de cola.

Dado que una persona la compra cola 1, existe una probabilidad de 0.90 de que en su siguiente compra consuma también cola 1.

Dado que una persona ha comprado Pepsi, existe una probabilidad de .80 de que en su siguiente compra consuma también Pepsi.

Estado 1 = La persona compra el refresco 1

Estado 2 = La persona compra el refresco 2

* Suponga que hay 100 millones de clientes para los refrescos de cola
* Cada refresco que produce le cuesta a la compañía $1 y se vende en $2.
* Por $ 500 millones/año, una empresa de publicidad garantiza una disminución del 10% al 5% en la porción de clientes que cambian el refresco de cola 1 después de una compra.

¿Debe la compañía que hace refresco de cola 1 emplear la firma?

Solución

Actualmente la proporción $\pi_1 = 2/3$ de las compras totales prefieren tomar el refresco de cola de la marca 1.

Por cada compra del refresco de cola 1 la compañía obtiene $1 de ganancia. Podemos calcular la ganancia anual en $3,466,666,667

La empresa de publicidad está ofreciendo cambiar la matriz

$$P_1 = \begin{bmatrix} .95 & .05 \\ .20 & .80 \end{bmatrix}$$

Para π_1 las ecuaciones de estado estable se convierten en

$\pi_1 = .95\pi_1 + .20\pi_2$

$\pi_2 = .05\pi_1 + .80\pi_2$

Sustituyendo la segunda ecuación por $\pi_1 + \pi_2 = 1$ y resolviendo, obtenemos $\pi_1 = 0.8$ y $\pi_2 = 0.2$

Ahora la ganancia anual de la compañía de cola 1 sería de $ 7,600,000,000

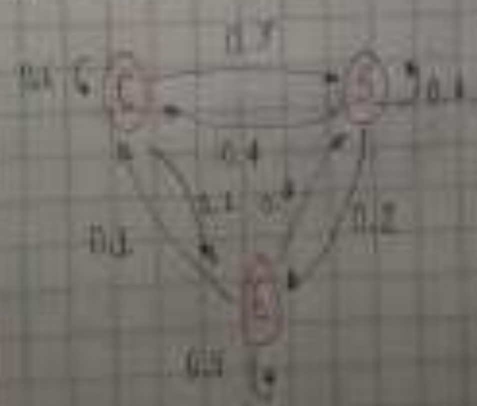
En la [illegible], la compañía que produce la Cola 1 debe emplear la campaña del comercial

Ejercicio 2: En una unidad de cuidados intensivos están internados pacientes; cada paciente es clasificado de acuerdo a un estado crítico, serio o estable. Estas clasificaciones son actualizadas cada mañana por un médico internista, de acuerdo a la evaluación experimentada por el paciente. Las probabilidades con las cuales se mueve de un estado a otro se resumen en la siguiente:

	Crítico	Serio	Estable
Crítico	0.6	0.3	0.1
Serio	0.4	0.4	0.2
Estable	0.1	0.4	0.5

¿Cuál es la probabilidad de que un paciente en estado crítico un día jueves esté estable el día sábado?

Sea X_n la v.a. que indica el estado que se encuentra un paciente cualquiera en el hospital en el día n. Los valores posibles para dicha variable son C, S y E representando en el día n. Un grafo que representa dicho proceso estocástico dado la tabla anterior es:



La probabilidad de que un paciente esté en estado crítico el día jueves y que el día sábado esté estable, está dado por P^2_{CE}, es decir, la probabilidad de pasar del estado crítico al estado estable al cabo de 2 etapas (días):

$$P^2_{CE} = 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.1 = 0.17$$

Notar que de forma equivalente se pueden utilizar las ecuaciones matriciales $f^n = P^T f^{n-1}$

$$f^1 = P^T f^0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$f^2 = P^T f^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.34 \\ 0.17 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que la probabilidad de pasar del estado crítico al estado estable es de 2 etapas es decir 17%