Unidad 2

PORCENTAJE OBTENIDO:45%

Examen

CÁLCULO

Integral

Instituto Tecnologico Superior de San Andres Tuxtla

Alumna: Perla Joselin Quino Caixba (221U0555)

Docente: Ing. Pablo Promotor Campechano

211-A Ingenieria Mecatronica

Fecha 29-Mayo-2023

Resolver las siguientes integrales indefinidas

- $\int (e^{2x} + e^{-x})^2 dx$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\left(e^{2x} + \frac{1}{e^x}\right)^2 = e^{4x} + \frac{2e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}$$

$$\int (e^{2x} + e^{-x})^2 dx = \int \left(e^{2x} + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx =$$

$$\int e^{4x} + \frac{2e^{\cancel{2x}}}{\cancel{e^x}} + \frac{1}{e^{2x}} dx = \int e^{4x} + 2e^x + \frac{1}{e^{2x}} dx =$$

$$\frac{1}{4}e^{4x} + 2e^x + \frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{4}e^{4x} + 2e^x + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$\int e^{4x} = \frac{1}{4}e^{4x}$$

$$\frac{1}{4}e^{4x} + 2e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} = \frac{e^{4x}}{4} + 2e^x - \frac{e}{2e^{2x}}$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x} = \frac{1}{-2}e^{-2x}$$

$$\boxed{\int (e^{2x} + e^{-x})^2 dx = \frac{e^{4x}}{4} + 2e^x - \frac{e}{2e^{2x}} + C}$$

- $\int \frac{7}{4(5+9x)^{2/3}} dx = \frac{7}{4}\int \frac{1}{(5+9x)^{2/3}} = \frac{7}{4}\int (5+9x)^{-2/3}$

$$u = 5 + 9x$$
$$du = 9\,dx$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)\int (5+9x)^{-2/3}\, 9dx$$

$$= \frac{7}{36}\int \frac{(5+9x)^{-2/3+3/3}}{-2/3+3/3} = \frac{7}{36}\int \frac{(5+9x)^{1/3}}{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{7}{12}\int (5+9x)^{1/3} = \frac{7}{12}\sqrt[3]{5+9x}$$

$$\boxed{\int \frac{7}{4(5+9x)^{2/3}} dx = \frac{7}{12}\sqrt[3]{5+9x} + C}$$

$$\int \frac{5}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\,dx$$

$u = 2x + 1$

$\frac{du}{dx} = 2dx$

$dx = 2\,du$

$$\int \frac{5}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} = \int \frac{5}{(2x+1)^{2/3}} = \int 5(2x+1)^{-2/3}\left(\frac{2}{2}\right)2dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{5(2x+1)^{-2/3+3/3}}{-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} = \frac{1}{2}\int \frac{5(2x+1)^{1/3}}{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{5\cdot 3\,(2x+1)^{1/3}}{1} = \frac{1}{2}(15)\int (2x+1)^{1/3}$$

$$\frac{15}{2}\int \sqrt[3]{(2x+1)} = \frac{15}{2}\sqrt[3]{(2x+1)}$$

$$\boxed{\int \frac{5}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\,dx = \frac{15\sqrt[3]{(2x+1)}}{2} + C}$$

$$\int \sqrt{7}\cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx$$

$u = \frac{\sqrt{3}}{2}x \quad du = \frac{\sqrt{3}}{2}dx$

$2du = \sqrt{3}\,dx \quad dx = \frac{2}{\sqrt{3}}du$

$$\sqrt{7}\int \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}dx =$$

$$\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}dx = \frac{2\sqrt{21}}{3}\left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right.$$

$$\boxed{y = -\frac{2\sqrt{21}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{3} + C}$$

$$\int \sqrt{11x^2+8}\,dx$$

$U^2 = 11x^2$

$U = \sqrt{11x^2} = \sqrt{11}x$

$\frac{du}{dx} = \sqrt{11}$

$du = \sqrt{11}\,dx$

$a^2 = 8$

$a = \sqrt{8}$

$$\int \sqrt{11x^2+8}\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\right)dx = \int \sqrt{11x^2+8}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)(\sqrt{11}\,dx) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\int \sqrt{11x^2+8}\,(\sqrt{11}\,dx) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\left[\frac{\sqrt{11}x\sqrt{11x^2+8}}{2} + \frac{8}{2}\ln\left(\sqrt{11}x + \sqrt{11x^2+8}\right.\right]$$

$$y = \left[\frac{\sqrt{11}x\sqrt{11x^2+8}}{2\sqrt{11}} + \frac{8}{2\sqrt{11}}\ln\left(\sqrt{11}x + \sqrt{11x^2+8}\right.\right]$$

$$y = \left[\frac{\sqrt{11}x\sqrt{11x^2+8}}{2\sqrt{11}} + \frac{4}{\sqrt{11}}\ln\left(\sqrt{11}x + \sqrt{11x^2+8}\right.\right]$$

$$\boxed{\int \sqrt{11x^2+8}\,dx = \left[\frac{\sqrt{11}x\sqrt{11x^2+8}}{2\sqrt{11}} + \frac{4}{\sqrt{11}}\ln\left(\sqrt{11}x + \sqrt{11x^2+8}\right.\right] + C}$$

LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO: QUINO CAIXBA PERLA JOSELIN	UNIDAD: II	
PERIODO: FEBRERO -JULIO 2023	GRUPO: 211A	FECHA DE ENTREGA: 29/05/2023
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
3%	**PRESENTACIÓN:** la investigación cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación **b.** letra legible **c.** Limpieza y orden **d.** Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía)	√		
2%	Maneja el lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia y secuencia entre párrafos	√		
2%	**INTRODUCCIÓN**: Da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las referencias bibliográficas que se utilizaron para su redacción.	√		
8%	**CONTENIDO**: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo, es digerible a todo público y presenta una metodología **COHERENCIA Y COHESIÓN:** Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo y es digerible a todo público coherente.	√		
3%	**Conclusiones**: Las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.	√		
2%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha señalada.	√		
20%	CALIFICACIÓN	20%		

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL	
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN			
NOMBRE DEL ALUMNO (A): QUINO CAIXBA PERLA JOSELIN			Problemario de la Unidad: 2
PERIODO: FEBRERO -JULIO 2023	GRUPO:211 A	FECHA DE ENTREGA: 29/05/2023	
INSTRUCCIONES			
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.			

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5 %	**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	√		
5 %	**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno	√		
10 %	**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.	√		
5 %	**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades	√		
5 %	**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	√		
30 %	**CALIFICACIÓN**	30%		

TEMA: METODOS DE INTEGRACIÓN

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

ITSSAT

Ingeniería mecatrónica IMCT-2010-229 Grupo: 211A

INVESTIGACIÓN DE LA UNIDAD II

Calculo Integral

Docente:

ING. Pablo Promotor Campechano

Presenta:

Juan José Marcial Fiscal 221U0547

Roció Teoba Herrera 221U0562

Miguel de Jesús Polito Cerón 221U0552

Perla Joselin Quino Caixba 221U0555

Juan José Jiménez Reyes 221U0541

San Andrés Tuxtla Veracruz **29 mayo de 2023**

INTRODUCCIÓN

Las integrales son herramientas cruciales para calcular áreas, determinar volúmenes y resolver una amplia gama de problemas en física, economía y otras áreas de las matemáticas. Las técnicas de integración pueden ayudar aquí porque no todas las integrales son tan simples de resolver como otras. En este artículo hablaremos de sus tres métodos fundamentales: permutación de funciones trigonométricas, fracciones por partes e integración por partes.

INTEGRACIÓN POR PARTES

- Hallar una antiderivada o primitiva usando integración por partes.
- Llevando a cabo la integración por partes utilizando un método tabular.

Este método se puede usar con muchos tipos diferentes de funciones, pero es especialmente útil para integrandos que tienen productos de funciones trascendentales y algebraicas. La integración por partes, por ejemplo, funciona bien con integrales como.

$$\int x \ln x \, dx, \quad \int x^2 e^x \, dx \quad y \quad \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

La fórmula de la derivada de un producto sirve de base para la integración por partes.

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener.

$$\begin{aligned} uv &= \int uv' \, dx + \int vu' \, dx \\ &= \int u \, dv + \int vu' \, dx \end{aligned}$$

Volviendo a escribir esta ecuación, se obtiene el teorema siguiente.

TEOREMA 8.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la original. Porque la elección de u y dv es importante en la integración por el proceso de partes, se proporcionan las pautas siguientes.

NOTA: ESTRATEGIAS PARA INTEGRAR POR PARTES.

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

Ejemplo 1: Encontrar $\int x\,e^x\,dx$

Solución: Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u\ dv$. Hay varias maneras de hacer esto

$$\int \underbrace{(x)}_{u}\,\underbrace{(e^x dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(e^x)}_{u}\underbrace{(x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(1)}_{u}\,\underbrace{(xe^x\,dx)}_{dv},\quad \int \underbrace{(xe^x)}_{u}\underbrace{(dx)}_{dv}$$

Las estrategias de la página anterior hacen pensar en la elección de la primera opción porque la derivada de $u = x$ es más simple que x, y $dv = e^x\, dx$ es la porción más complicada del integrando que se adapta a una fórmula básica de la integración.

$$dv = e^x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

Ahora, la integración por partes produce.

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= xe^x - e^x + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Para verificar esto, derivar $xe^x - e^x + C$ para ver que se obtiene el integrando original.

NOTA El ejemplo 1 muestra que no es necesario incluir una constante de integración al resolver

$$v = \int e^x\, dx = e^x + C_1.$$

Para ilustrar esto, reemplazar $v = e^x$ por $v = e^x + C_1$ y aplicar la integración por partes para ver que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 2: Encontrar $\int x^2 \, ln \; x \; dx$

Solución: En este caso, x^2 se integra más fácil que $ln\ x$. Además, la derivada de $ln\ x$ es más simple que $ln\ x$. Así, se debe hacer $dv = x^2\, dx$.

$$dv = x^2\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx$$

La integración por partes produce

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \qquad \text{Fórmula de integración por partes.}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{Sustituir.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C. \qquad \text{Integrar.}$$

Verificar este resultado derivado

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(x^2) - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

Ejemplo 3: Encontrar $\int x^2 \ sen \ x \ dx$

NOTA: Algunas integrales requieren integrarse por partes más de una vez.

Solución: Los factores x^2 y $sen\ x$ son igualmente fáciles para integrar. Sin embargo, la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de $sen\ x$ no lo es. Así que se debe elegir la opción $u = x^2$.

$$dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx. \qquad \text{Primer uso de la integración por partes.}$$

Este primer uso de la integración por partes ha tenido éxito simplificando la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esa integral, aplicar de nuevo la integración por partes. Esta vez, sea $u = 2x$.

$$dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 \, dx$$

Ahora, la integración por partes produce

$$\int 2x \cos x \, dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{Segundo uso de la integración por partes.}$$

$$= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Combinando estos dos resultados, se puede escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

Al hacer aplicaciones repetidas de la integración por partes, tener cuidado de no intercambiar las sustituciones en las aplicaciones sucesivas. Así, en el ejemplo 4, la primera sustitución era $u = x^2$ y $dv = sen\ x\ dx.$ Si en la segunda aplicación se hubiera cambiado la sustitución a $u = cos\ x\ y\ dv = 2x,$ se habría obtenido

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

deshaciendo como consecuencia la integración anterior y volviendo a la integral original. Al hacer aplicaciones repetidas de integración por partes, también debe percatarse de la aparición de un múltiplo constante de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x\ cos\ 2x\ dx.$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

La sustitución trigonométrica es un método de integración. En lugar de sustituir usando una nueva variable que es función de x (u=f(x)), se define a x como una función trigonométrica de una nueva variable (x=f(θ)).

El método consiste en:

- Reescribir la ecuación en términos de la variable (θ) y su diferencial (dθ)
- Resolver la integral
- Reescribir el resultado en términos de x

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas,

usar sustituciones trigonométricas para evaluar integrales que contienen radicales

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \qquad \sqrt{a^2 + u^2} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{u^2 - a^2}.$$

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar al radical en el integrando. Hacer esto con las identidades pitagóricas.

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad \text{y} \quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1.$$

Por ejemplo, si $a > 0$, sea $u = a \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} \\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta} \\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

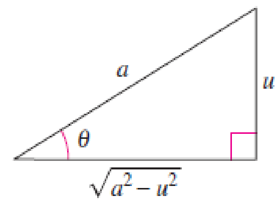
Notar que $\cos\theta \ge 0$, porque $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea

   $u = a \operatorname{sen} \theta.$

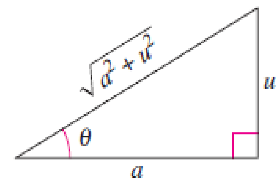
   Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$, sea

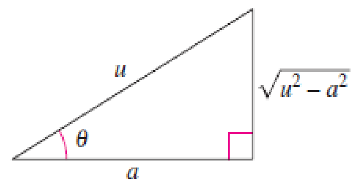
   $u = a \tan \theta.$

   Entonces $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$, sea

   $u = a \sec \theta.$



   Entonces

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \begin{cases} a \tan \theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a \tan \theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$$

NOTA: Las restricciones sobre 0 aseguran que la función que define la sustitución es inyectiva.

De hecho, éstos son los mismos

TEOREMA 8.2 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN ESPECIALES ($a > 0$)

1. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsen \frac{u}{a} + u\sqrt{a^2 - u^2}\right) + C$
2. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right|\right) + C, \quad u > a$
3. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right|\right) + C$

Ejemplo 1:

Calcula la siguiente integral:

Empezamos observando que , lo cual implica que , y , es decir, . Entonces hacemos: :

Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-4\,\left(\frac{3}{2}\,\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\,\sin z}\,\left(\frac{3}{2}\,\cos z\,dz\right)$$

Ahora podemos simplificar dentro del signo de raíz:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-4\,\left(\frac{3}{2}\,\sin z\right)^2}}{\frac{3}{2}\,\sin z}\,\left(\frac{3}{2}\,\cos z\,dz\right) &= \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz\\ &= \int \frac{3\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz\end{aligned}$$

Pero $1-\sin^2 z = \cos^2 z$,luego,

$$\begin{aligned}3\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}\,\cos z\,dz &= 3\int \frac{\cos z}{\sin z}\,\cos z\,dz\\ &= 3\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\,dz\\ &= 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\,dz\\ &= 3\int \left(\frac{1}{\sin z}-\sin z\right)\,dz\end{aligned}$$

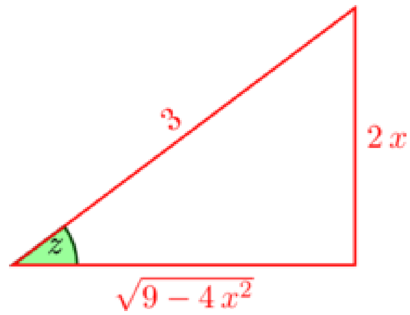
Ahora podemos integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx &= 3\int \frac{1}{\sin z}\,dz - 3\int \sin z\,dz\\ &= 3\int \csc\,z\,dz + 3\,\cos z\\ &= 3\,\ln\left|\csc\,z - \cot\,z\right| + 3\,\cos z + C\end{aligned}$$

Hasta aquí hemos obtenido un resultado parcial. Recuerda que inicialmente la integral estaba dada en términos de x, no de z. Por lo que nosotros debemos dar el resultado en términos de x. Para lograr eso, vamos a representar geométricamente la sustitución inicial:

$$x = \frac{3}{2}\sin z \qquad \Rightarrow \qquad \sin z = \frac{2\,x}{3} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

En el triángulo rectángulo tenemos (para calcular el cateto adyancente al ángulo z hemos utilizado el teorema de Pitágoras):



Por la forma como se definen las funciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo tenemos:

$$\csc\, z = \frac{3}{2\,x}, \qquad \cos z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3} \qquad \text{y} \qquad \cot z = \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}$$

Entonces, podemos reescribir la solución como:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{x}\,dx &= 3\,\ln\left|\csc\, z - \cot\, z\right| + 3\,\cos z + C \\
&= 3\,\ln\left|\frac{3}{2\,x} - \frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + 3\left(\frac{\sqrt{9-4\,x^2}}{3}\right) + C \\
&= 3\,\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4\,x^2}}{2\,x}\right| + \sqrt{9-4\,x^2} + C
\end{aligned}$$

NOTA: Observa que hemos utilizado un artificio: como la integral no se puede integrar de manera inmediata debido a la forma que tiene, sabiendo que puede transformarse a una forma inmediatamente integrable usando una sustitución trigonométrica, vamos a utilizar la transformación sugerida en la tabla dada al principio de esta lección. Después de hacer la sustitución obtenemos una integral en términos de funciones trigonométricas que se puede integrar usando la variable z.

Para regresar este resultado a términos de x, utilizamos la sustitución que tomamos de la tabla para representarla geométricamente usando un triángulo rectángulo y las definiciones de las funciones trigonométricas en él.

Ejemplo 2:

Calcula la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}}$$

Usaremos la sustitución:

$$x = \frac{5}{4}\tan z \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{5}{4}\sec^2 z\, dz$$

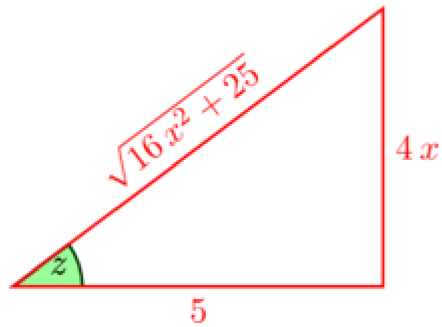
Esto transforma la integral a:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} &= \int \frac{\frac{5}{4}\sec^2 z\, dz}{\sqrt{16\,\left(\frac{5}{4}\tan z\right)^2+25}} \\
&= \frac{5}{4}\int \frac{\sec^2 z\, dz}{\sqrt{25\,\tan z^2+25}} \\
&= \frac{5}{4}\int \frac{\sec^2 z\, dz}{5\,\sqrt{\tan z^2+1}} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2 z\, dz}{\sqrt{\tan z^2+1}}
\end{aligned}$$

Pero $\sqrt{\tan z^2+1} = \sqrt{\sec^2 z} = \sec\, z$, luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2 z\, dz}{\sec\, z} = \frac{1}{4}\int \sec\, z = \frac{1}{4}\ln|\sec\, z+\tan z| + C$$

Para hacer el cambio a la variable x usamos el siguiente triángulo rectángulo:



Entonces, haciendo las sustituciones de acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16\,x^2+25}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{16\,x^2+25}}{5} + \frac{4\,x}{5}\right| + C$$

Ejemplo 3:

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

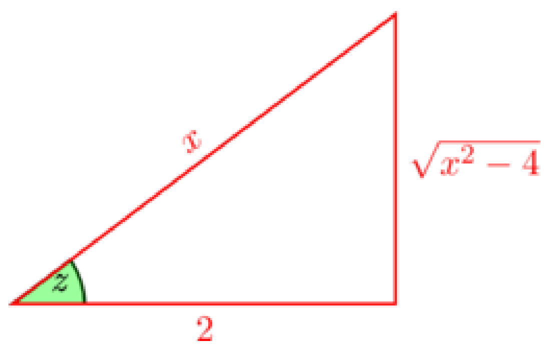
Hacemos:

$$x = 2\sec z \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\sec z\,\tan z\,dz$$

Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx &= \int \frac{2\sec\,z\,\tan z\,dz}{4\,\sec^2 z\,\sqrt{4\,\sec^2 z-4}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\,z\,\tan z\,dz}{2\,\sec^2 z\,\sqrt{\sec^2 z-1}} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\tan z\,dz}{\sec\,z\,\tan z} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\sec\,z} \\
&= \frac{1}{4}\int \cos z \\
&= \frac{1}{4}\sin z + C
\end{aligned}$$

Dado que $x = 2\sec\,z$, se sigue: $\sec\,z = \frac{x}{2}$. El triángulo que corresponde para hacer el cambio de variable de z a x es:



Entonces, $\sin z = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, y la integral queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4\,x} + C$$

FRACCIONES SIMPLES O PARCIALES

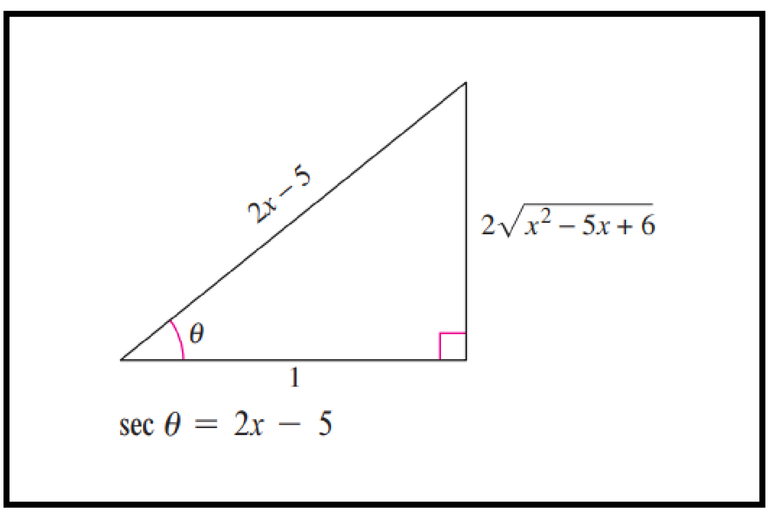
- Reconocer cómo una fracción se puede descomponer en fracciones simples o fracciones parciales.
- Integre usando la descomposición de fracciones simples con factores lineales.
- integrar funciones racionales descomponiendo fracciones simples en factores cuadráticos.

FRACCIONES SIMPLES O PARCIALES

Para aplicar las fórmulas fundamentales de integración, veremos un método en esta sección para descomponer una función racional en funciones racionales más pequeñas. El método de fracciones simples o parciales es el nombre de este proceso. Considere la integral para apreciar las ventajas del método de fracciones simples.

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx$$

Para evaluar esta integral sin las fracciones parciales, completar el cuadrado y hacer un cambio de variable trigonométrica (ver la figura) para obtener



$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \frac{dx}{(x-5/2)^2-(1/2)^2} && a=\tfrac{1}{2},\ x-\tfrac{5}{2}=\tfrac{1}{2}\sec\theta. \\
&= \int \frac{(1/2)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(1/4)\tan^2\theta} && dx=\tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta. \\
&= 2\int \csc\theta\,d\theta \\
&= 2\ln\left|\csc\theta-\cot\theta\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}}\right| + C \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.
\end{aligned}
$$

Ahora, suponer que se ha observado.

$$
\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}. \qquad \text{Descomposición en fracciones parciales.}
$$

Entonces, evaluar la integral fácilmente, como sigue.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx \\
&= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C
\end{aligned}
$$

Este método es preferible a los cambios de variable trigonométricas. Sin embargo, su uso depende de la habilidad para factorizar el denominador, x 2 5x 6, y para encontrar las **fracciones parciales**

$$\frac{1}{x-3} \quad y \quad -\frac{1}{x-2}$$

En esta sección se estudiarán las técnicas para encontrar las descomposiciones des fracciones parciales.

AYUDA DE ESTUDIO En cursos previos se vio cómo combinar funciones tales como

$$\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+3} = \frac{5}{(x-2)(x+3)}.$$

El método de las fracciones parciales muestra cómo invertir este proceso.

$$\frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{?}{x-2} + \frac{?}{x+3}$$

Recordar del álgebra que cada polinomio con coeficientes reales puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos irreductibles.* Por ejemplo, el polinomio

$$x^5 + x^4 - x - 1$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x - 1 &= x^4(x+1) - (x+1) \\ &= (x^4 - 1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x^2-1)(x+1) \\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)(x+1)^2(x^2+1) \end{aligned}$$

donde $(x-1)$ es un factor lineal, $(x+1)^2$ es un factor lineal repetido y (x^2+1) es un factor cuadrático irreducible. Usando esta factorización, escribir la descomposición de la fracción parcial de la expresión raciona

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1}$$

donde $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, como sigue.

$$\frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

DESCOMPOSICIÓN DE $N(x)/D(x)$ EN FRACCIONES SIMPLES

1. **Dividir en caso impropio:** Si $N(x)/D(x)$ es una fracción impropia (es decir, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador en el numerador para obtener

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (\text{a polinomio}) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $N_1(x)$ es menor del grado de $D(x)$. Entonces aplicar los pasos 2, 3 y 4 a la expresión racional propia $N_1(x)/D(x)$.

2. **Factorizar el denominador:** Factorizar completamente el denominador en factores de los tipos

$$(px+q)^m \qquad \text{y} \qquad (ax^2+bx+c)^n$$

donde $ax^2 + bx + c$ es irreducible.

3. **Factores lineales:** Para cada factor lineal $(px + q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de m fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m}$$

4. **Factores cuadráticos:** Para cada factor cuadrático $(ax^2 + bx + c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma siguiente de n fracciones.

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

FACTORES LINEALES

Las técnicas algebraicas para determinar las constantes en los numeradores de una descomposición en fracciones parciales con factores lineales se

Ejemplo 1: Factores Lineales Dientitos

Escribir la descomposición de la fracción parcial para $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Solución: Porque $x^2 = 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, incluir una fracción parcial para cada factor y escribir

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

donde A y B serán determinados. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común denominador $(x - 3)(x - 2)$ da la **ecuación básica**

$$1 = A(x - 2) + B(x - 3). \qquad \text{Ecuación básica.}$$

Porque esta ecuación es cierta para todo x, se puede sustituir cualquier valor conveniente para x para obtener las ecuaciones en A y B. Los valores más convenientes son los que hacen los factores particulares igual a 0.

Para resolver para A, sea $x = 3$ y obtener

$$1 = A(3 - 2) + B(3 - 3) \qquad \text{Sea } x = 3 \text{ en la ecuación básica.}$$

$$1 = A(1) + B(0)$$

$$A = 1.$$

Para resolver para B, sea $x = 2$ y obtener

$$1 = A(2 - 2) + B(2 - 3)$$
$$1 = A(0) + B(-1)$$
$$B = -1.$$

Sea $x = 2$ en la ecuación básica.

NOTA Notar que las sustituciones para x en el ejemplo 1 son escogidas por su conveniencia determinando los valores para A y B; $x = 2$ se elige para eliminar el término $A(x - 2)$, y $x = 3$ se elige para eliminar el término $B(x - 3)$. La meta es hacer las sustituciones *convenientes* siempre que sea posible. ■

Así, la composición es

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x - 2}$$

Como se muestra al principio

Asegurarse de que el método de fracciones parciales sólo es práctico para las integrales de funciones racionales cuyos denominadores factorizan "muy bien". Por ejemplo, si el denominador en el ejemplo 1 se cambiara $a\, x^2 - 5x + 5$, su factorización como

$$x^2 - 5x + 5 = \left[x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

sería demasiado complicada como para usar con las fracciones simples parciales. En casos así, es preferible completar el cuadrado o recurrir a integración simbólica en un sistema algebraico por computadora para realizar la integración. Al hacer esto, se obtiene

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 5}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln\left|2x - \sqrt{5} - 5\right| - \frac{\sqrt{5}}{5} \ln\left|2x + \sqrt{5} - 5\right| + C.$$

FACTORES CUADRÁTICOS

Al usar el método de fracciones simples con los factores lineales, una opción conveniente de x da un valor inmediatamente por uno de los coeficientes. Con los factores cuadráticos, un sistema de ecuaciones lineales tiene que ser resuelto, sin tener en cuenta la opción de x.

Ejemplo 2: Factores Cuadráticos y Lineales Distintos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}\, dx$

Solución: Porque

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x - 1)(x^2 + 4)$$

Debe incluir una fracción simple para cada factor

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x-1)(x^2+4)$ da la ecuación básica

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)(x)(x-1).$$

Para resolver para A, sea $x = 0$ y obtener

$$-8 = A(-1)(4) + 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A.$$

Para resolver para B, sea $x = 1$ y obtener

$$-10 = 0 + B(5) + 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = B.$$

En este punto, C y D serán determinados todavía. Encontrar estas constantes restantes eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema resultante de ecuaciones lineales. Si $x = -1$, entonces, usando $A = 2 \; y \; B = -2$, escribir

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-2)(5) + (-2)(-1)(5) + (-C+D)(-1)(-2) \\ 2 &= -C + D. \end{aligned}$$

Si $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (2)(1)(8) + (-2)(2)(8) + (2C+D)(2)(1) \\ 8 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal sustrayendo la primera ecuación de la segunda

$$-C + D = 2$$

$$2C + D = 8$$

Da $C = 2$. Por consiguiente, $D = 4$, y sigue que

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{x(x-1)(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln(x^2+4) + 2\arctan\frac{x}{2} + C.$$

Ejemplo 3: Factores Lineales Repetidos

Encontrar $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx.$

Solución: Porque

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + x &= x(x^2 + 2x + 1) \\ &= x(x+1)^2 \end{aligned}$$

incluir una fracción para cada potencia de x y $(x+1)$ y escribir

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador $x(x+1)^2$ da la ecuación básica

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx.$$ Ecuación básica.

Para resolver para A, sea $x = 0$. Esto elimina los términos B y C y da

$$6 = A(1) + 0 + 0$$
$$A = 6.$$

Para resolver para C, sea $x = -1$. Esto elimina los términos A y B y da

$$5 - 20 + 6 = 0 + 0 - C$$
$$C = 9.$$

Se han usado las opciones más convenientes para x, para encontrar el valor de B, usar cualquier otro valor de x junto con los valores calculados de A y C. Usando $x = 1$, $A = 6$ y $C = 9$ producen

$$5 + 20 + 6 = A(4) + B(2) + C$$
$$31 = 6(4) + 2B + 9$$
$$-2 = 2B$$
$$B = -1.$$

Así, sigue que

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right| - \frac{9}{x+1} + C.\end{aligned}$$

Intentar verificar este resultado derivando. Incluir álgebra en la verificación, simplificando la derivada hasta que haya obtenido el integrando original.

NOTA Es necesario hacer tantas sustituciones para x como coeficientes desconocidos (A, B, C, . . .) para ser determinados. Así, en el ejemplo 2, se hicieron tres sustituciones ($x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$) para resolver para A, B y C. ■

CONCLUSIÓN

En resumen, las técnicas de integración como la integración por partes, las fracciones por partes y las sustituciones trigonométricas son herramientas valiosas para abordar integrales más complejas y resolver problemas difíciles en matemáticas y otros campos. Estas técnicas requieren práctica y una comprensión de las matemáticas subyacentes. Sin embargo, una vez que se domina, proporciona métodos poderosos para calcular integrales que antes se consideraban inaccesibles.

Tenga en cuenta que estas técnicas son solo un punto de partida y hay muchas otras técnicas y métodos a considerar dentro del área más amplia de integración. La práctica continua y la exposición a una variedad de problemas integrales profundizarán su comprensión y fortalecerán sus habilidades en esta importante área de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- "Cálculo - Ron Larson, Bruce Edwards, Vol 1 y 2, 9na edición + Solucionario". La Librería del Ingeniero. https://www.libreriaingeniero.com/2020/09/calculo-ron-larson-bruce-edwards-vol-1-y-2-9na-edicion.html (accedido el 28 de mayo de 2023).

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla (I.T.S.S.A.T.)

Cálculo integral

Unidad II

"Problemario de la unidad II"

Ing. Pablo Promotor Campechano

Ing. Mecatrónica 211-A

Juan José Marcial Fiscal	221U0547
Rocio Teoba Herrera	221U0562
Miguel De Jesús Polito Cerón	221U0552
Perla Joselin Quino Caixba	221U0555
Juan José Jiménez Reyes	221U0541

San Andrés Tuxtla, Ver. A 29 de mayo de 2023.

- $\int \frac{sen 2x dx}{\sqrt{cos 2x}}$

Sustitución

$u = 2x$ | $x = \frac{u}{2}$

$dx = \frac{1}{2} du$

[1] $\rightarrow$ $\int \frac{sen(u)}{2\sqrt{cos(u)}} du$

Sustitucion
Diferencial

$\int -\frac{1}{\sqrt{cos(u)}} d(cos(u))$ [2] $\rightarrow$ $\frac{1}{2} \int -\frac{1}{\sqrt{v}} dv$

$v = cos(u)$
$-dv = sen(u) du$

Aplicar regla de potencia

$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$

a

$n = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} = -\sqrt{v}$

Deshacer la sustitución

$v = cos(u)$ [2]$^{\uparrow}$

$-\sqrt{cos(u)}$

$\rightarrow$ Deshacer la sustitución

$u = 2x \mid x = \frac{u}{2}$ [1]$^{\uparrow}$

$-\sqrt{cos(2x)} + C$ *

- $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-5}}$

Sustitución

$u = e^x$ $\quad [1] \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{u-5}}\,du$

$du = e^x\,dx$

Sustitución

$v = u-5 \mid u = v+5$ $\quad [2] \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv$

$du = dv$

Aplicar la regla de potencias

$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}$

a $\qquad \rightarrow 2\sqrt{v}$

$n = -\frac{1}{2}$

Deshacer la sustitución

$v = u-5 \mid u = v+5$ $\quad [2]^{\uparrow}$

$2\sqrt{u-5}$

Deshacer la sustitución

$u = e^x$ $\quad [1]^{\uparrow}$ $\qquad 2\sqrt{e^x-5} + C$

- $\int \frac{2dx}{\sqrt{3+2x}}$ calcular -> $\frac{2}{\sqrt{2x+3}} dx$

Sustitución

$U = 2x+3$ | $x = \frac{u-3}{2}$ [1] -> $2\int \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

$dx = \frac{1}{2} du$

Aplicar la regla de potencia

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

a

$n = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow 2\sqrt{u}$

Deshacer la sustitución

$u = 2x+3$ | $x = \frac{u-3}{2}$ [1]

$2\sqrt{2x+3} + C$ *

- $\int \frac{3dx}{2+3x}$ calcular $\int \frac{3}{3x+2}\,dx$

Sustitución

$u = 3x+2 \mid x = \frac{u-2}{3}$ $[1] \to 3\int \frac{1}{3u}\,du$

$dx = \frac{1}{3}\,du$

Tabular

$\ln(|u|)$

Deshacer la sustitución

$u = 3x+2 \mid x = \frac{u-2}{3}$ $[1]$

$\ln(|3x+2|) + C$

$$\int \frac{3\,dx}{e^{2x}}$$

$$\int e^{x}dx = e^{x}+c$$
$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$$

$$\int \frac{3dx}{e^{2x}} = 3\int \frac{1}{e^{2x}} = 3\int e^{-2x}$$

$$\boxed{\int e^{-2x} = \frac{1}{-2}e^{-2x}}$$

$$3\int \frac{1}{-2}e^{-2x} = 3\int \frac{1}{-2e^{2x}} = -\frac{3}{2e^{2x}}$$

$$\boxed{\int \frac{3dx}{e^{2x}} = -\frac{3}{2e^{2x}} + C}$$

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{e^{x}}}$$

$$\int \frac{4dx}{\sqrt{e^{x}}} = \int \frac{4dx}{e^{\frac{1}{2}x}} = 4\int \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x}} = 4\int e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$4\int \frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} = 4(-2)\int e^{-\frac{1}{2}x} = -8\int e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\boxed{\int e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$$= \frac{-8}{e^{\frac{1}{2}x}}$$

$$\boxed{\int \frac{4dx}{\sqrt{e^{x}}} = \frac{-8}{e^{\frac{1}{2}x}} + C}$$

- $\int csc^2(a-bx)\,dx$

$$\boxed{csc^2 u\,du = -\cot u + C}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = a-bx \\ \frac{du}{dx} = -b\,dx \\ \frac{du}{-b} = dx \end{array}}$$

$$\int csc^2(a-bx)\,\frac{du}{-b}$$

$$-\frac{1}{b}\int csc^2(a-bx) = -\frac{1}{b}\int -cot(a-bx)$$

$$\frac{1}{b}\cot(a-bx) = \frac{\cot(a-bx)}{b}$$

$$\boxed{\int csc^2(a-bx)\,dx = \frac{\cot(a-bx)}{b} + C}$$

- $\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$

$$\boxed{\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \frac{x}{2} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}dx \\ 1du = 2dx \\ dx = \frac{2}{1}du \\ dx = 2du \end{array}}$$

$$\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\;2du$$

$$2\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = 2\int \sec\frac{x}{2}$$

$$2\sec\frac{x}{2}$$

$$\boxed{\int sen\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx = 2\sec\frac{x}{2} + C}$$

$$\int \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \frac{2}{3}x \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{3} \\ du = \frac{2}{3}dx \\ 3du = 2dx \\ dx = \frac{3}{2}du \end{array}}$$

$$\int \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3} = \frac{3}{2}\int -\cos\frac{2x}{3} = -\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x =$$

$$-\frac{3\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen}\frac{2x}{3}\,dx = -\frac{3\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2} + C}$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = ax+b \quad \frac{du}{dx} = a\,dx \\ \frac{du}{a} = dx \end{array}}$$

$$\int \cos ax+b\,\frac{du}{a} =$$

$$\frac{1}{a}\int \cos(ax+b) = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen}(ax+b) = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(ax+b)}{a}$$

$$\boxed{\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(ax+b)}{a} + C}$$

$$\int \csc \frac{ax}{b} \, ctg \frac{ax}{b} \, dx$$

$$\boxed{\int \csc u \tan u \, du = -\csc u + C}$$

$$\boxed{\begin{gathered} u = \frac{ax}{b} \\ \frac{du}{dx} = \frac{a}{b} dx \\ a\,du = b\,dx \\ dx = \frac{b}{a} du \end{gathered}}$$

$$\int \csc \frac{ax}{b} \, ctg \frac{ax}{b} \, \frac{b}{a} du$$

$$\frac{b}{a} \int \csc \frac{ax}{b} \, ctg \frac{ax}{b} = \frac{b}{a} \int \csc \frac{ax}{b}$$

$$-\frac{b}{a} \csc \frac{ax}{b} = \frac{-b \csc\left(\frac{ax}{b}\right)}{a}$$

$$\boxed{\int \csc \frac{ax}{b} \, ctg \frac{ax}{b} \, dx = \frac{-b \csc\left(\frac{ax}{b}\right)}{a} + C}$$

$$\int e^x ctg \, e^x \, dx$$

$$\boxed{\int ctg \, u \, du = \ln(\sin u) + C}$$

$$\boxed{\begin{gathered} u = e^x \\ \left[\frac{d}{dx} e^x\right] dx = du \\ e^x dx = du \end{gathered}}$$

$$\int e^x ctg \, e^x = \int ctg \, e^x$$

$$\int \ln\left(\left|\sin(e^x)\right|\right) =$$

$$\ln\left(\left|\sin(e^x)\right|\right)$$

$$\boxed{\int e^x ctg \, e^x dx = \ln\left(\left|\sin(e^x)\right|\right)}$$

$\int \sec^2 2ax \, dx$

$\int \sec^2 u \, du = \tan u \, du + C$

$\int \sec^2 2ax \frac{1}{2a} du$

$u = 2ax$

$\frac{du}{dx} = 2a \, dx$

$dx = \frac{1}{2a} du$

$\frac{1}{2a} \int \sec^2 2ax = \frac{1}{2a} \int \tan 2ax$

$\frac{1}{2} \tan 2ax = \frac{\tan(2ax)}{2}$

$$\boxed{\int \sec^2 2ax \, dx = \frac{\tan(2ax)}{2} + C}$$