Álgebra lineal Examen Unidad IV

05/12/23

Alumna: Luz Estefani Alegria Prieto

Instrucción: Resolver los siguientes ejercicios

1. Determine si el subespacio z pertenece al vector $\mathbb{R}^2$

$z \{(x,y): x+y^3 > 1\}$

① $(0,0)$: $0+(0)^3 > 1$

$0+0 > 1$

$0 > 1$

② $(1,9) = (1)+(9)^3 > 1$

$1+7[illegible] > 1$

[illegible] > 1

③ $2(5,4) = (10,8)$

$(10)+(8)^3 > 1$

[illegible] > 1

[illegible] > 1

2. $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$M(T)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \{(1,1),(3,-2)\}$

[illegible]

$P = M[illegible] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

② [illegible]

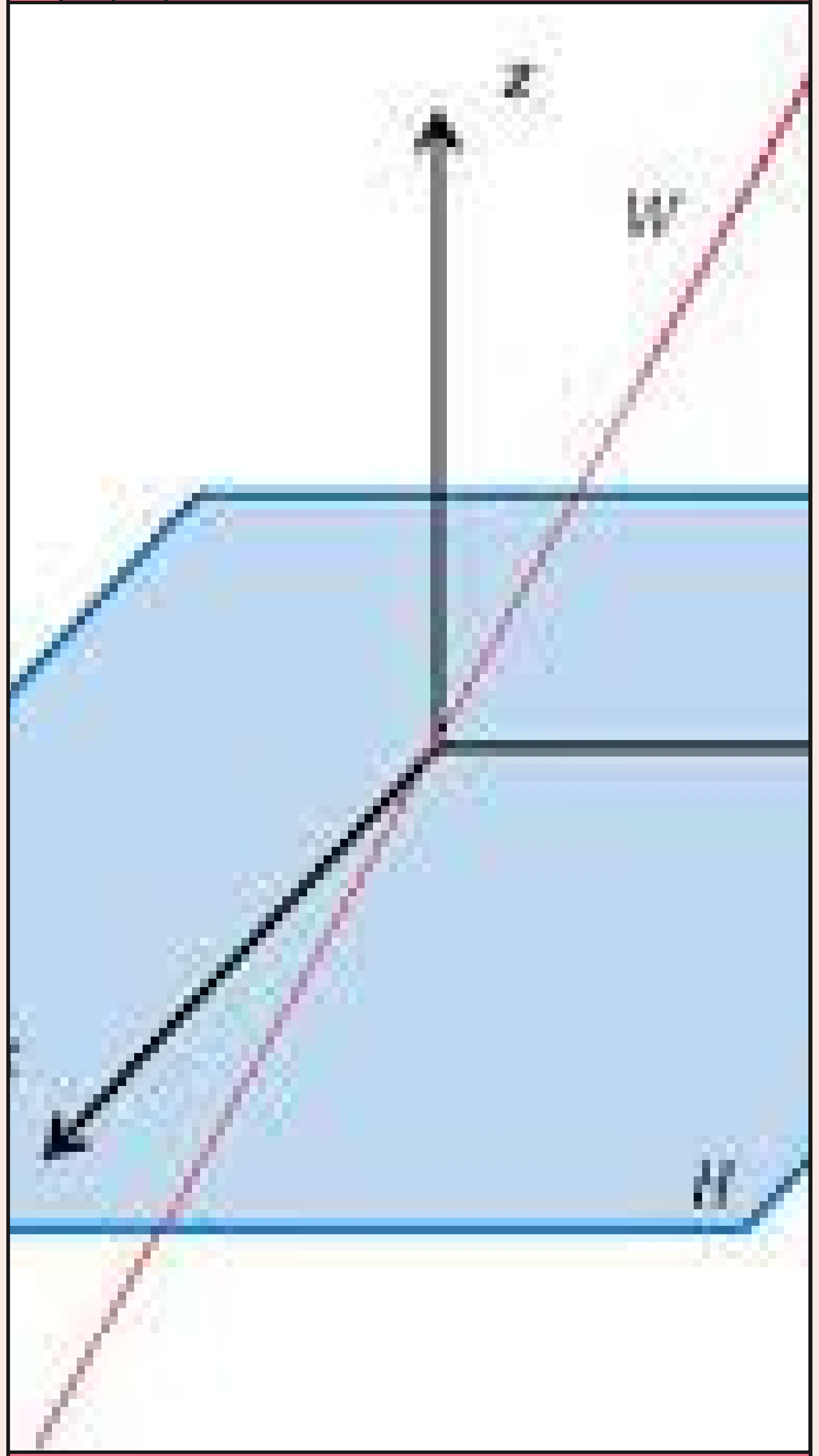
$P^{-1} = M[illegible]$ [illegible]

[illegible]

$M(T)_{BB} =$ [illegible] $= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.1 Definición de espacio vectorial

Equipo 1:
Ariel Michell Villalobos Pucheta
Citlali Triche Hipolito
Nancy Paola Cano Torres
Luz Estefani Alegria Prieto
Diego Manuel Diaz Oy

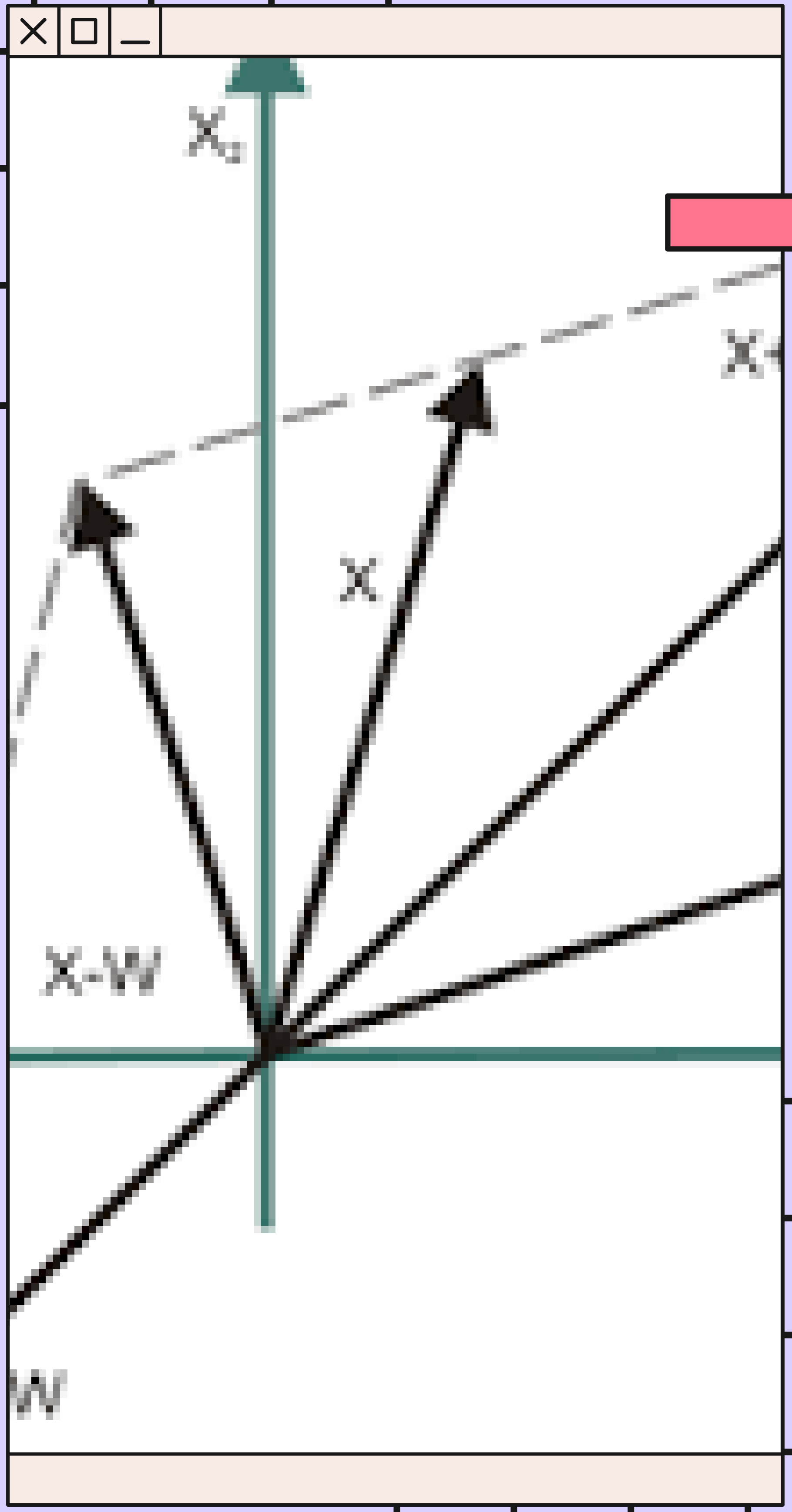


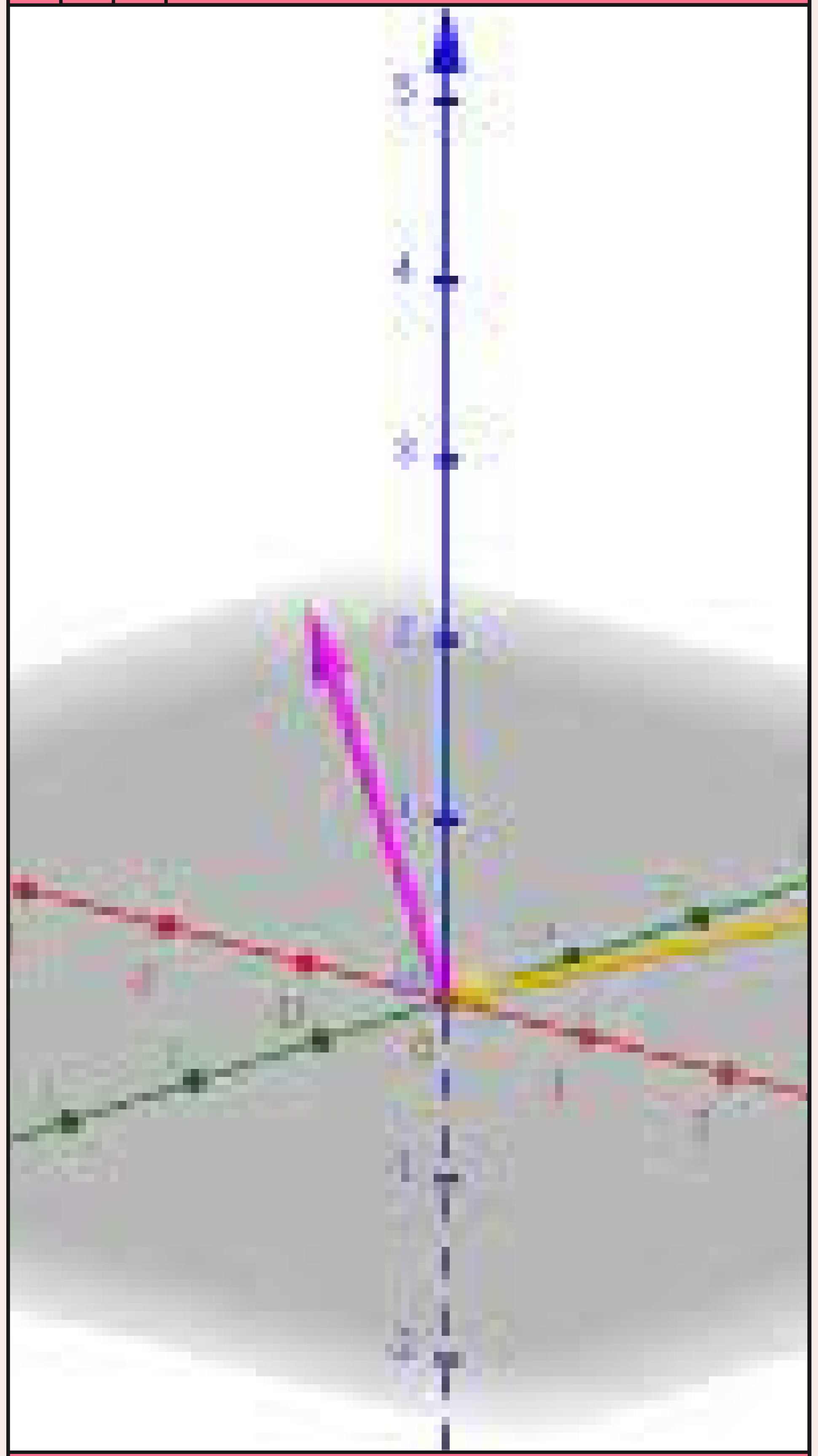
Espacio vectorial

En álgebra, un espacio vectorial es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna y una operación externa, con 8 propiedades fundamentales. A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores y a los elementos del cuerpo, escalares.

Propiedades

- 1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (asociativa).
- 2. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (conmutativa).
- 3. Existe $e \in V$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall v \in V$ (elemento neutro).
- 4. Para cada $v \in V$ existe w tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
- 5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in R$ (seudo-asociativa).
- 6. $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$ y $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall u, v \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in R$ (distributiva).
- 7. $1v = v, \forall v \in V$ (unimodular).



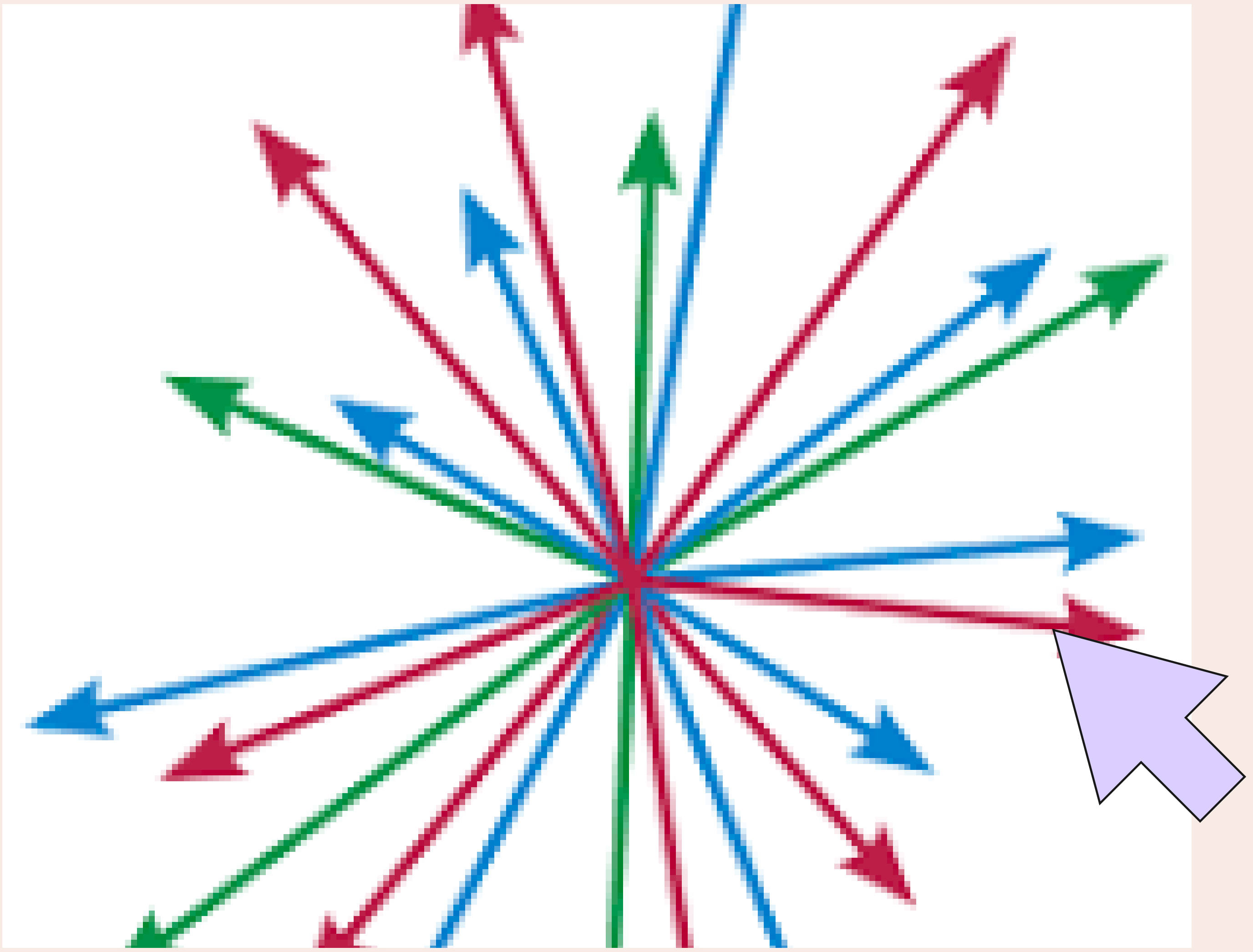


Ejemplos

Cada uno de los siguientes ejemplos es un espacio vectorial con el conjunto apropiado de escalares (ℝ o C), con las apropiadas definiciones de suma de vectores y de producto de un vector por un escalar.

- El espacio vectorial real de todos los vectores geométricos V en el espacio físico de tres dimensiones con las operaciones suma de vectores y producto por un escalar.
- ℝ es el espacio vectorial real de todas las matrices columna nx1 reales, siendo la suma de vectores en este caso la suma de matrices, y el producto el producto por un escalar el usual para matrices.
- El conjunto de funciones E={f: ℝ → ℝ }, es decir, las funciones reales de variable real, dotado de las operaciones:

En resumen, un espacio vectorial es un conjunto de elementos llamados vectores, que cumplen con ciertas propiedades algebraicas. Estas propiedades incluyen la cerradura bajo la suma vectorial y la multiplicación por escalares, así como la existencia de un vector cero y la existencia de inversos aditivos para cada vector.



Conclusión

LISTA DE COTEJO PARA INVESTIGACION DOCUMENTAL

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno(a): Luz Estefani Alegria Prieto			
GRUPO:	307-A	CARRERA:	INGENIERIA Gestión Empresarial

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		NOMBRE DEL CURSO: Algebra Lineal
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO		FIRMA DEL DOCENTE
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO:4.1 Espacios Vectoriales	FECHA: 5 de diciembre 2024	PERIODO ESCOLAR: agosto2023-enero 2024
INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN		
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
1%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación	X		
1%	**b.** Introducción	X		
1%	**c.** Ortografía	X		
2%	**d.** Desarrollo coherente del tema	X		
2%	**e.** citar fuentes de información	X		
1%	**Enfoque:** buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
10%	**Elaboración**: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
2%	**Responsabilidad:** Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
20%	**CALIFICACIÓN**	20		

Problemario Álgebra lineal

Alumna: Luz Estefani Alegría Prieto

4.1

¿Qué es un espacio vectorial? Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones; la suma y el producto por un escalar.

4.2

Determine si el subconjunto dado H dado el espacio vectorial V es subespacio de V.

$V = \mathbb{R}^2$

$H = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$

1. $H \neq 0$

$(0,0) \in H$

$x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0+0 = 0$

$H \neq 0$

2. H es cerrado bajo la suma

No cumple, porque

$(0,1) \in H \rightarrow 0^2+1^2 = 0+1 = 1 \leq 1$

$(1,0) \in H \rightarrow 1^2+0^2 = 1+0 = 1 \leq 1$

$(0,1)+(1,0) = (1,1)$

pero $(1,1) \notin H$ porque

$x^2+y^2 = 1^2+1^2 = 1+1 = 2 \not\leq 1$

Por lo tanto H no es subespacio de V

4.3

Dado $B = [(1,1,3)\ (3,5,5)\ (2,1,8)]$ determinar si B es LI o LD

$(0,0,0) = \alpha(1,1,3) + \beta(3,5,5) + y(2,1,8)$

$(0,0,0) = (\alpha,\alpha,3\alpha) + (3\beta,5\beta,5\beta) + (2y,y,8y)$

$(0,0,0) = (\alpha+3\beta+2y, \alpha+5\beta+y, 3\alpha+5\beta+8y)$

$$\begin{aligned} \alpha+3\beta+2y&=0\\ \alpha+5\beta+y&=0\\ 3\alpha+5\beta+8y&=0 \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} F_2 = F_2 - F_1\\ F_3 = F_3 - 3F_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$= F_3 = F_3 + 2F_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

∞ soluciones

B es linealmente dependiente (L.D)

4.4

Calcular la dimensión y una base del siguiente subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, \begin{matrix} a-b-c=0 \\ a+2b+d=0 \\ 3b+c+d=0 \end{matrix} \right.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F21} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} F32(-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a-b-c=0 \\ 3b+c+d=0 \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ d=-3b-c \end{cases}$$

$$U=\left\{ \begin{pmatrix} b+c & b \\ c & -3b-c \end{pmatrix} / c,d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} / c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

La dimensión de U es 2 y una base es:

$$B=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Cambio de base:

Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base B_1 a B_2

a) Si $(v)_{B_1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ calcular $(v)_{B_2}$

b) Si $(v)_{B_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ calcular $(v)_{B_1}$

c) Si $B_1=\{(1,3),(0,4)\}$ obtener la base B_2

ítem a

$$P\cdot(v)_{B_1}=(v)_{B_2} \to (v)_{B_2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

ítem b

$$(v)_{B_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \to (v)_{B_1}$$

$$P\cdot(v)_{B_1}=(v)_{B_2} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot(v)_B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \to (v)_B=\begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

item c

$B_1 = \{(1,3)\ (0,4)\}$

$Id((1,3)) = (1,3)$

$Id((0,4)) = (0,4)$

$v_1 = (1,3) \quad v_2 = (0,4)$

$P = M(Id)_{B_1 B_2} = ((v_1)_{B_2} (v_2)_{B_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$B_2 = \{w_1, w_2\}$

$(1,3) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \Rightarrow w_1 = (1,3) \quad \dfrac{(0,4 - (1,3)}{-3} = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ *

1.5

Obtener un subespacio $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $U \cap W = \{0\}$, con $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$

$W = \{(x,y,z) : x - 2y - 3z = 0\}$

$U \cap W = \{0\}$

$W^{\perp} \to W$

$x - 2y - 3z = 0$

$p/y = 1 \qquad p/y = 0 \qquad$ base $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$z = 0 \qquad z = 1$

$x = 2 \qquad x = 3$

Buscamos (x,y,z) tal que

$\left.\begin{aligned} \langle (2,1,0)(x,y,z) \rangle = 0 &\to 2x + y = 0 \\ \langle (3,0,1)(x,y,z) \rangle = 0 &\to 3x + z = 0 \end{aligned}\right\} P/W^{\perp}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad p\ z = 1$

$y = 2/3$

$x = -1/3$ *

base $W^{\perp}: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ *

$U = \text{Lin}\{(-1,2,3)\}$

1.6

Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base B del espacio euclidiano R^3 en una base ortonormal. Aplicar el producto interno usual en R^3

① $B = \{(1,0,1)(0,0,1)(-1,1,0)\}$

$v_1 = (1,0,1)$

$v_2 = (0,0,1)$

$v_3 = (-1,1,0)$

$v_1/v_2 = (1,0,1)/(0,0,1) = 1$

$v_1/v_3 = (1,0,1)/(-1,1,0) = -1$

$v_2/v_3 = (0,0,1)/(-1,1,0) = 0$

$B = \{(0,0,1)(-1,1,0),(1,0,1)\}$

$w_1 = (0,0,1)$

$w_2 = (-1,1,0)$

$$w_3 = (1,0,1) - \left(\frac{(1,0,1)/(0,0,1)}{(0,0,1)/(0,0,1)}\right)(0,0,1) - \left(\frac{(1,0,1)/(-1,1,0)}{(-1,1,0)/(-1,1,0)}\right)(-1,1,0)$$

$w_3 = (1,0,1) - (1/1)(0,0,1) + (-1/2, 1/2, 0)$

$w_3 = (1/2, 1/2, 0)$

$B = \{(0,0,1)(-1,1,0)(1/2,1/2,0)\}$

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

<table>
<tr><td colspan="2">DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO</td><td colspan="2"></td><td colspan="3">ASIGNATURA: ALGEBRA LINEAL</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">NOMBRE DEL ALUMNO: Luz Estefani Alegría Prieto</td><td colspan="3">UNIDAD: cuatro</td></tr>
<tr><td>PERIODO: agosto2023-enero2024</td><td>GRUPO:307-A</td><td colspan="2"></td><td colspan="3">FECHA DE ENTREGA:5 de diciembre del 2023</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">INSTRUCCIONES</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">VALOR DEL REACTIVO</td><td></td><td rowspan="2" colspan="2">CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)</td><td colspan="2">CUMPLE</td><td>OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td></td><td>SI</td><td>NO</td><td></td></tr>
<tr><td>4%</td><td></td><td colspan="2">PRESENTACIÓN: El trabajo cumple con los requisitos de
a. Buena presentación
b. No tiene faltas de ortografía
c. Ordenado y limpio</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4%</td><td></td><td colspan="2">FORMATO DE ENTREGA: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>20%</td><td></td><td colspan="2">DESARROLLO DE EJERCICIOS: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8%</td><td></td><td colspan="2">RESULTADO: El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4%</td><td></td><td colspan="2">RESPONSABILIDAD: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.</td><td>X</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>40%</td><td></td><td colspan="2">CALIFICACIÓN</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>