INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

EVALUACIÓN ESCRITA DE LA UNIDAD I

NOMBRE DEL DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CÁLCULO VECTORIAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Rocio Teoba Herrera.		CARRERA: INGENIERÍA MECATRONICA
GRUPO: 311 A	FECHA: 28-Septiembre-23	PERIODO ESCOLAR: SEPTIEMBRE 2023-ENERO 2024
INSTRUCCIONES		

Lea cuidadosamente y conteste correctamente lo que se te solicita. El tiempo para responder es de 50 minutos. Si tiene alguna duda sobre lo que se te solicita pregunta al docente. Se puede utilizar calculadora y formulario.

PROBLEMA 1.- Considere los puntos inicial y final de un vector u. Dibujar el segmento dirigido asociado a u, expresar u en componentes y dibujar el vector con su punto inicial en el origen

Punto Inicial	Punto final
a) (5,2,3)	(-3,6,8)

PROBLEMA 2.- Sea $u = \langle 2,-3,3 \rangle$, $v = \langle -6,5,2 \rangle$ y $w = \langle 1,-2,9 \rangle$, hallar.

a) $u - 2v + 5w$

b) $-w + 2u - 3v$

c) el producto punto entre u y w

d) el vector unitario en la misma dirección a u

e) el vector unitario en la dirección opuesta a v

f) el producto vectorial de v con w

g) el triple producto escalar de los vectores u, v y w.

Rocio Teoba Herrera. 311-A. Cálculo Vectorial. 28-Septiembre-23.

CÁLCULO vectorial
examen UNIDAD 1

PROBLEMA 1.

Considere los puntos inicial y final de un vector u. Dibujar el segmento dirigido asociado a u, expresar u en componentes y dibujar el vector con su punto inicial en el origen.

PUNTO INICIAL — PUNTO FINAL

a) $(5, 2, 3)$ — $(-3, 6, 8)$

u = punto final - punto inicial

$u = (-3, 6, 8) - (5, 2, 3)$

$u = \langle -8, 4, 5 \rangle$

$u = -8i + 4j + 5k$

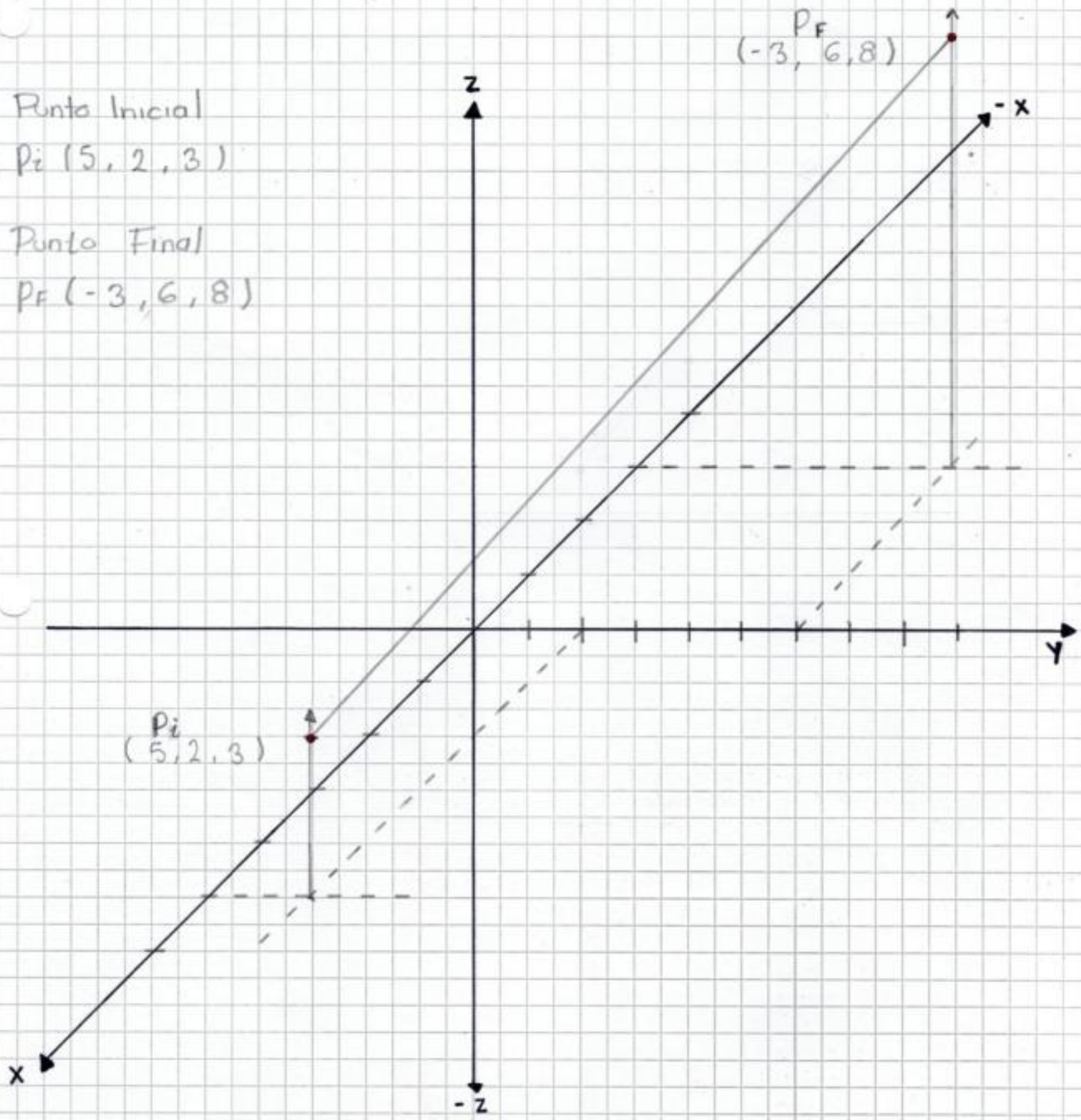
Vector desplazamiento

Punto Inicial

$P_i\ (5, 2, 3)$

Punto Final

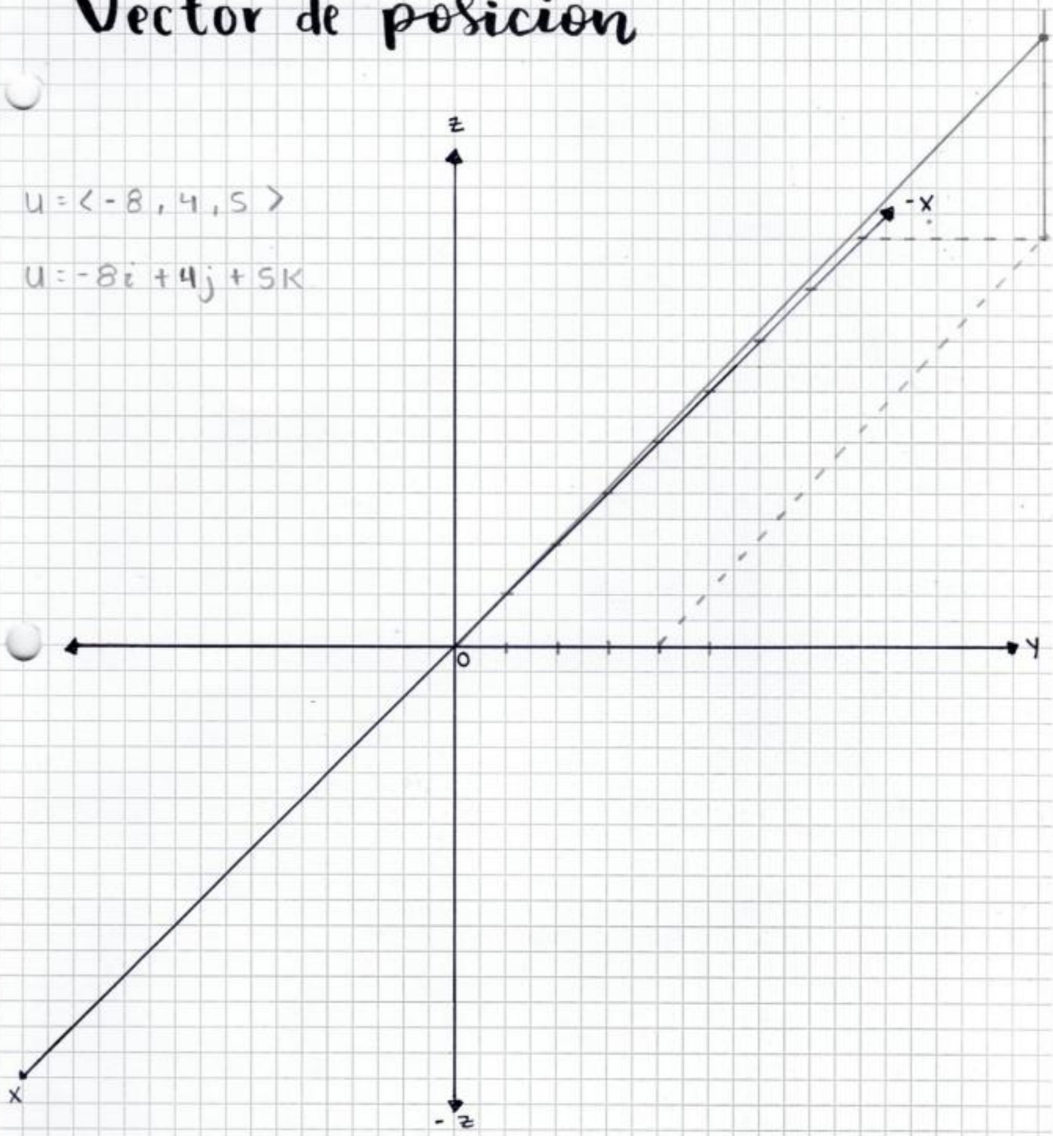
$P_F\ (-3, 6, 8)$



Vector de posición

$u = \langle -8, 4, 5 \rangle$

$u = -8i + 4j + 5K$



PROBLEMA 2

Sea

$u = \langle 2, -3, 3 \rangle$

$v = \langle -6, 5, 2 \rangle$

$w = \langle 1, -2, 9 \rangle$

a) $u - 2v + 5w$

$\langle 2i - 3j + 3k \rangle - 2\langle -6i + 5j + 2k \rangle + 5\langle i - 2j + 9k \rangle$

$\langle 2i - 3j + 3k \rangle + 12i - 10j - 4k + 5i - 10j + 45k$

$$\boxed{= \langle 19i - 23j + 44k \rangle}$$

b) $-w + 2u - 3v$

$-\langle i - 2j + 9k \rangle + 2\langle 2i - 3j + 3k \rangle - 3\langle -6i + 5j + 2k \rangle$

$\langle -i + 2j - 9k \rangle + 4i - 6j + 6k + 18i - 15j - 6k$

$$\boxed{= \langle 21i - 19j - 9k \rangle}$$

c) el producto punto entre u y w

$u : \langle 2, -3, 3 \rangle$

$w : \langle 1, -2, 9 \rangle$

$u \cdot w = \langle 2, -3, 3 \rangle \cdot \langle 1, -2, 9 \rangle$

$u \cdot w = (2)(1) + (-3)(-2) + (3)(9)$

$u \cdot w = 2 + 6 + 27$

$\boxed{u \cdot w = 35}$

d) el vector unitario en la misma dirección a u.

$u : \langle 2, -3, 3 \rangle$

$|\vec{u}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (3)^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{22}$

$|\vec{u}| = 4.69$

$$\vec{u} = \frac{2}{4.69} i - \frac{3}{4.69} j + \frac{3}{4.69} k$$

$$\boxed{\vec{u} = 0.4264 i - 0.6396 j + 0.6396 k.}$$

e) el vector unitario en la dirección opuesta a V.

$V = \langle -6, 5, 2 \rangle$

$|\vec{V}| = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2 + (2)^2}$

$|\vec{V}| = \sqrt{65}$

$|\vec{V}| = 8.06$

$\vec{V} = -\left(\frac{-6}{8.06}i + \frac{5}{8.06}j + \frac{2}{8.06}K\right)$

$$\boxed{\vec{V} = 0.7444i - 0.6203j - 0.2481K}$$

f) el producto vectorial de V con W

$V = \langle -6, 5, 2 \rangle$

$W = \langle 1, -2, 9 \rangle$

$$u \times w = \begin{vmatrix} i & j & K \\ -6 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + K \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$u \times w = i[(5)(9)-(2)(-2)] - j[(-6)(9)-(2)(1)]$
$+ K[(-6)(-2)-(5)(1)]$

$= i[45+4] - j[-54-2] + K[12-5]$

$= i[49] - j[-56] + K[7]$

$$\boxed{= 49i + 56j + 7K = \langle 49, 56, 7 \rangle}$$

g) el triple producto escalar de los vectores u, v y w.

$u = \langle 2, -3, 3 \rangle$

$v = \langle -6, 5, 2 \rangle$

$w = \langle 1, -2, 9 \rangle$

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -6 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$u \cdot (v \times w) = 2[(5)(9) - (2)(-2)] + 3[(-6)(9) - (2)(1)]$$
$$+ 3[(-6)(-2) - (5)(1)]$$

$$u \cdot (v \times w) = 2[45 + 4] + 3[-54 - 2] + 3[12 - 5]$$

$$u \cdot (v \times w) = 2[49] + 3[-56] + 3[7]$$

$$u \cdot (v \times w) = 98 - 168 + 21.$$

$$\boxed{u \cdot (v \times w) = -49}$$

LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO VECTORIAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO: TEOBA HERRERA ROCIO	UNIDAD: I	
PERIODO: SEPTIEMBRE 2023-ENERO 2024	GRUPO: 311 A	FECHA DE ENTREGA: 22/09/2023
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
3%	**PRESENTACIÓN:** la investigación cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación **b.** letra legible **c.** Limpieza y orden **d.** Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía)	√		
2%	Maneja el lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia y secuencia entre párrafos	√		
2%	**INTRODUCCIÓN**: Da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las referencias bibliográficas que se utilizaron para su redacción.	√		
8%	**CONTENIDO**: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo, es digerible a todo público y presenta una metodología **COHERENCIA Y COHESIÓN:** Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo y es digerible a todo público coherente.	√		
3%	**Conclusiones**: Las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.	√		
2%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha señalada.	√		
20%	CALIFICACIÓN	20%		

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla (I.T.S.S.A.T.)

CÁLCULO VECTORIAL

Unidad 1

Investigación

Ing. Mecatrónica 311-A

- Rocio Teoba Herrera 221u0562
- Perla Joselin Quino Caixba 221u0555
- Osswill Uriel Ventura Gracia 221u0566
- Juan José Marcial Fiscal 221u0547
- Juan José Jiménez Reyes 221u0541

Ing. Pablo Promotor Campechano

San Andrés Tuxtla, Ver. A 22-septiembre-2023

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los vectores en el espacio son una parte fundamental de la geometría y las matemáticas aplicadas. Un vector es una entidad matemática que se utiliza para representar magnitudes que tienen tanto magnitud como dirección. A diferencia de los números escalar que solo tienen magnitud (como 5 metros o 10 grados Celsius), los vectores también incluyen información sobre la dirección en la que se aplica la magnitud.

En el contexto tridimensional del espacio, los vectores se representan mediante una combinación de tres componentes que corresponden a las coordenadas x, y y z. Estos componentes se pueden visualizar como desplazamientos en las tres dimensiones del espacio. Por ejemplo, un vector (v) en el espacio podría estar representado como:

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

Donde "x" es la componente en la dirección del eje x, "y" es la componente en la dirección del eje y y "z" es la componente en la dirección del eje z. Estas componentes se pueden utilizar para describir la posición de un punto en el espacio o para representar cualquier cantidad física que tenga dirección y magnitud, como la velocidad, la fuerza o el momento angular.

Los vectores en el espacio se pueden sumar, restar y multiplicar por escalares (números) de manera algebraica, y estas operaciones tienen interpretaciones geométricas. La suma de vectores se realiza colocando el inicio de uno de los vectores en el extremo del otro, y el resultado es un nuevo vector que va desde el punto inicial del primer vector hasta el punto final del segundo vector. Esta operación se llama suma vectorial.

APLICACIONES DE VECTORES EN EL ESPACIO

Los vectores son útiles en muchos aspectos de la física y la ingeniería. Una fuerza se representa mediante un vector porque tiene una magnitud (medida en libras o newtons) y una dirección. Si sobre un objeto actúan varias fuerzas, la fuerza resultante que experimenta el objeto es la suma vectorial de estas fuerzas.

Qué es un Vector

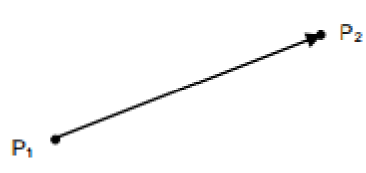
Los científicos emplean el término vector para indicar una cantidad (por ejemplo, un desplazamiento o velocidad o fuerza) que tiene magnitud y dirección. Un vector se representa por lo común mediante una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector. Un vector se denota por medio de una letra en negrita (v) o escribiendo una flecha sobre la letra v .

Un vector es un segmento dirigido de recta.

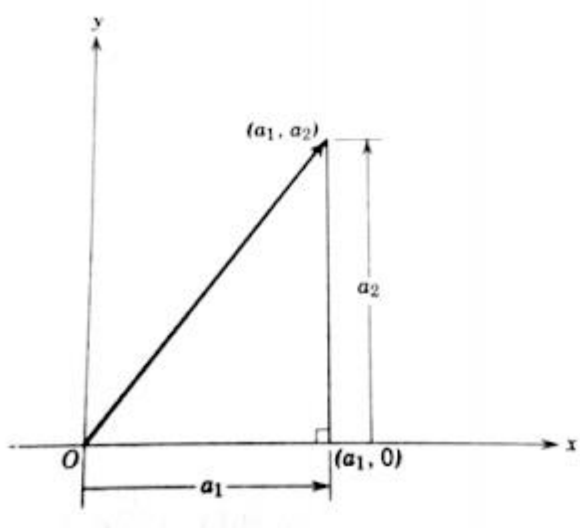
Un vector libre, geométricamente puede ser caracterizado por un segmento orientado en el espacio, el cual contiene:

- Un **origen**, a considerar cuando interese conocer el punto de aplicación del vector.
- Una **dirección** o línea de acción, coincidente con la de la recta que la contiene o cualquier otra recta paralela.
- Un **sentido**, que viene determinado por la punta de □echa localizada en el extremo del vector.

Un vector se representa por un segmento de línea recta con dirección y longitud dadas. En la figura, P1 es el punto inicial y P2 el punto terminal del vector, y la cabeza de la flecha indica la dirección del vector.

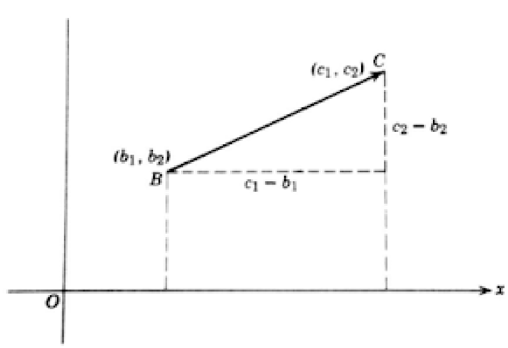


Un par ordenado de números reales (a1, a2) se puede usar para determinar el vector representado por el segmento rectilíneo que une al origen con el punto (a1, a2) en un sistema de coordenadas rectangulares. El vector determinado por el par ordenado de números reales (a1, a2) tiene la propiedad de que, si partimos del punto inicial, recorremos una distancia dirigida a1 paralela al eje x, y después recorremos una distancia dirigida a2 paralela al eje y, llegamos al punto terminal.



Inversamente, supongamos que se da el vector BC. Al dibujar líneas paralelas a los ejes de coordenadas por el punto inicial B y por el por el punto terminal C, podemos encontrar la pareja ordenada (a1, a2) que determina el vector; a1 = c1 - b1, a2 = c2 - b2.

Por tanto, dado un punto P, hay una correspondencia biunívoca entre los vectores bidimensionales (R2) con P como punto inicial y pares ordenados de números reales, y en consecuencia llamaremos a una pareja de números reales.



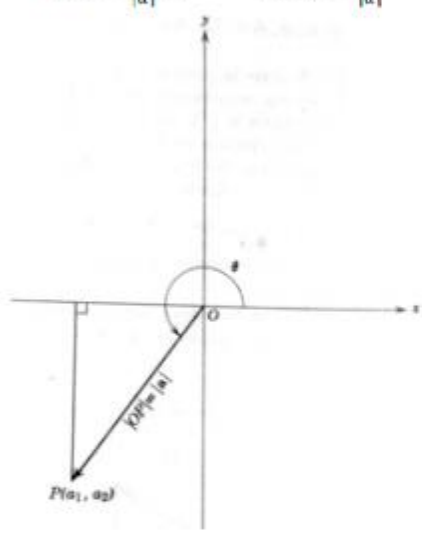
VECTOR EN R2

Un vector a (de dos dimensiones) es un par ordenado de números reales (a1, a2), y la representación a = (a1, a2). La magnitud |a| de a está dada por

$$|a| = \sqrt[2]{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

La dirección de a es la dirección del origen al punto (a1, a2) a lo largo de la recta que une estos puntos. Esta dirección está determinada por el menor ángulo positivo θ cuyo lado inicial es la parte positiva del eje x y cuyo lado terminal es el segmento que une al origen con (a1, a2). Al referirnos a la siguiente figura vemos que

$$\sin\theta = \frac{a_2}{|a|} \; ; \qquad \cos\theta = \frac{a_1}{|a|}$$



VECTORES EN R 3

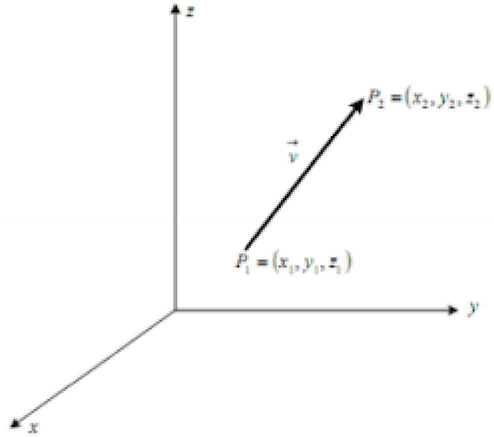
Un vector de R 3 es una terna ordenada de números reales. Denotada de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

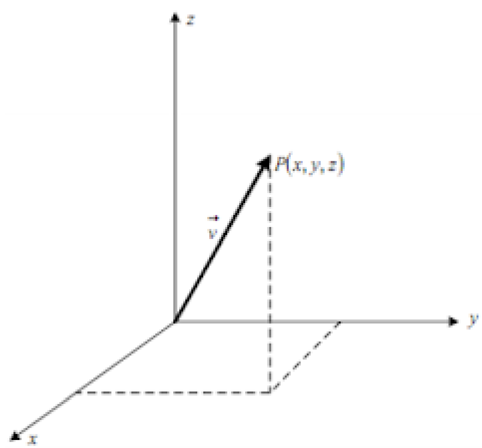
Geométricamente a un vector de R 3 se representa en el espacio como un segmento de recta dirigido.

Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P1 hacia P2 tenemos una representación del vector

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1 \ , y_2 - y_1, z_1 - z_2)$$



Este vector puede tener muchas otras representaciones equivalentes en el espacio. Una representación equivalente útil es aquella que se realiza ubicando al vector con el origen como punto de partida.



Características de un Vector:

Magnitud: La magnitud es el fenómeno físico medible que se representa con el vector. Cantidad. También conocida como intensidad o módulo.

Espacio vectorial: Es el tipo de plano cartesiano sobre el que se traza el vector y en el que se indica su dirección.

Dirección: La dirección es la característica del vector que indica el plano sobre el que actúa la magnitud de la cual se está tratando.

Sentido: El sentido es determinado desde el punto de origen indicando en qué dirección se está aplicando la magnitud de que se trate.

Punto de origen y extremo: Es el punto a partir del cual se traza el vector, generalmente marcado con un punto o un pequeño círculo. El extremo es el final del trazo del vector, y se representa con la punta de una flecha.

Trazo: Un vector siempre se representa como un segmento de recta, que tiene su origen en el punto de aplicación y termina en el extremo.

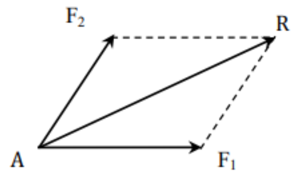
Resultante: La resultante es el vector que se traza desde el punto de origen de un vector hasta el extremo del último vector trazado.

CÁLCULO DE FUERZAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

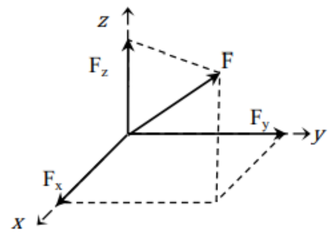
Los vectores tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería. Un ejemplo es la fuerza. Un vector puede usarse para representar fuerza, porque la fuerza tiene magnitud y dirección. Si dos o más fuerzas están actuando sobre un objeto, entonces la fuerza resultante sobre el objeto es la suma vectorial de los vectores que representan las fuerzas.

Suma de Vectores

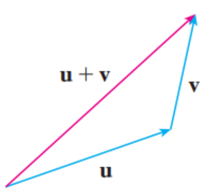
La suma de dos vectores que parten de un punto es otro vector que se encuentra en la diagonal del paralelogramo formado con esos dos vectores, y parte también del mismo punto. Como se ve, sumar vectores, equivale a obtener la resultante de un sistema de dos fuerzas concurrentes. Componente de un vector $\bar{F}$ es otro vector que al sumarse con uno o varios más, tienen por suma el vector $\bar{F}$. Son componentes cartesianos de un vector aquellos que tienen la dirección de los ejes cartesianos. Es decir:



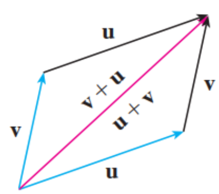
$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$



Definición de suma vectorial Si **u** y **v** son vectores colocados de modo que el punto inicial de **v** esté en el punto terminal de **u**, entonces la **suma u + v** es el vector del punto inicial de **u** al punto terminal de **v**.



Ley del triángulo



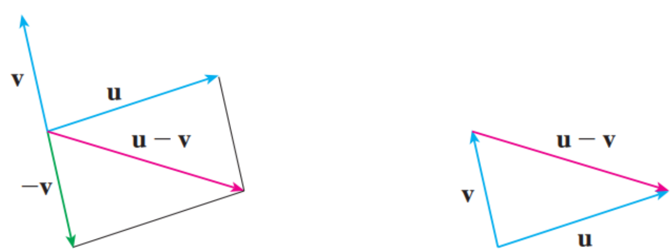
Ley del paralelogramo

Producto de un Escalar por un Vector

Un escalar es una cantidad que queda completamente definida por una sola magnitud. En Física son escalares la temperatura, la longitud, el tiempo, la masa, etc. En cambio, son vectores las cantidades que tienen magnitud y dirección, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el momento y otras muchas. En nuestra álgebra un escalar es un número real. Al multiplicar un escalar α por un vector obtenemos un nuevo vector en la misma dirección que el original. Pero con una magnitud diferente o dirección contraria:

$$\alpha\bar{F} = \alpha\bar{F}_x + \alpha\bar{F}_y + \alpha\bar{F}_z \quad \text{o bien} \quad -\alpha\bar{F} = -\alpha\bar{F}_x - \alpha\bar{F}_y - \alpha\bar{F}_z$$

Definición de multiplicación por un escalar Si c es un escalar y $\mathbf{v}$ es un vector, entonces el **múltiplo escalar** $c\mathbf{v}$ es el vector cuya longitud es $|c|$ multiplicado por la longitud de $\mathbf{v}$ y cuya dirección es la misma que $\mathbf{v}$ si $c > 0$ y es opuesta a $\mathbf{v}$ si $c < 0$. Si $c = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$.



Vectores Unitarios

Si tenemos un vector unitario e —i e., de magnitud igual a 1— en cierta dirección, los vectores 2e, 5e. –3e son paralelos al primero. Los vectores i, j y k son vectores unitarios en las direcciones de los ejes equis, ye y zeta, respectivamente. De modo que:

$$\bar{F}_x = F_x\mathbf{i}\ ;\ \bar{F}_y = F_y\mathbf{j}\ ;\ \bar{F}_z = F_z\mathbf{k}$$

Y, por fin, un vector queda unívocamente expresado de la siguiente manera:

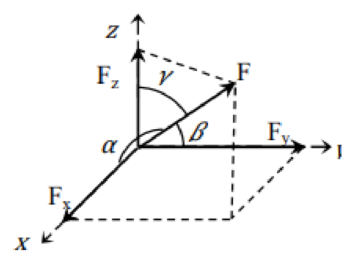
$$\bar{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

que se llama forma polinómica (dada su semejanza con un polinomio algebraico) o normal (puesto que sus tres componentes son normales —perpendiculares— entre sí).

Cosenos Directores

Conocida la forma polinómica de un vector, se puede conocer el ángulo que forma con cada uno de los ejes coordenados. Como Fx y F son, respectivamente el cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo entonces

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F};\ \cos\beta = \frac{F_y}{F};\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$



que son los cosenos directores del vector, y α, β y γ los ángulos que forma con cada uno de los ejes cartesianos. Un vector unitario cualquiera en forma polinómica sería:

$\mathbf{e} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$

por tanto, dado que la magnitud de un vector es

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$$

Entonces

$$1 = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

que viene a ser una ley de dependencia de los tres ángulos que una recta forma con los ejes coordenados.

Vector apoyado en dos *Puntos*

Supongamos que la línea de acción de una fuerza de magnitud F pasa por los puntos A (x1, y1, z1) y B (x2, y2, z2).

Para hallar un vector que represente tal fuerza tendríamos que multiplicar la magnitud de la fuerza por un vector unitario en la dirección AB. Es decir

$$\bar{F} = F\mathbf{e}$$

Pero

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

y su magnitud es

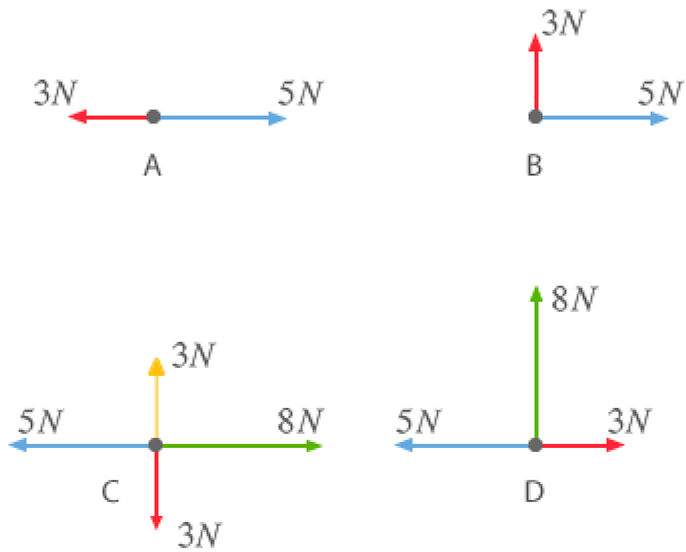
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

o sea que

$$\bar{F} = F\left[\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\right]$$

Ejemplo

¿Determinar la fuerza resultante en cada uno de los siguientes casos?

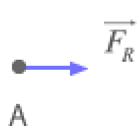


Solución

Vamos a determinar la fuerza resultante en cada caso. Cuando dispongas de varias fuerzas para sumar, lo ideal es que obtengas fuerzas resultantes parciales, sumando siempre de 2 en 2 fuerzas que posean la misma dirección hasta que te sea posible.

Caso A

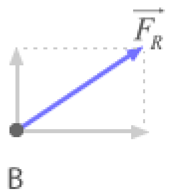
Ambas fuerzas concurrentes tienen la misma dirección, aunque sentido contrario, por tanto el valor de la fuerza resultante será el valor absoluto de la resta de ambas y su dirección la de la mayor de ellas. F_R = | 5N - 3N | = 2 N con dirección horizontal y sentido hacia la derecha.



Caso B

En este caso ambas fuerzas forman un ángulo de 90º, por tanto, la fuerza resultante será la raíz de la suma de los cuadrados de ambas fuerzas.

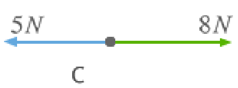
$F_R=\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} = 5.83$ N



Caso C

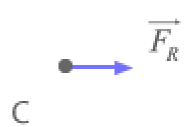
En esta situación primero obtendremos las fuerzas resultantes parciales, en concreto calcularemos la fuerza resultante que se obtiene al sumar las fuerzas verticales (F_V) e ignoraremos las horizontales.

$F_V = |\ 3\ N - 3\ N\ | = 0\ N$



Podemos observar que las fuerzas verticales se anulan entre ellas y desaparecen. Por último, ya sólo nos queda calcular la resultante de estas dos fuerzas horizontales.

$F_R = |\ 8\ N - 5\ N\ | = 3\ N$

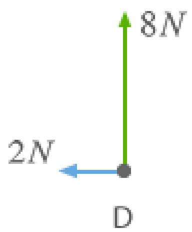


Caso D

Aquí procederemos como el caso C aunque calcularemos la fuerza resultante parcial en la horizontal (F_H).

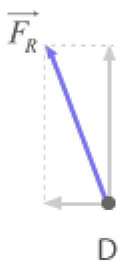
$F_H = |\ 5\ N - 3\ N\ | = 2\ N$

Tras esta operación el esquema de fuerzas queda de la siguiente forma:



Ahora las dos fuerzas restantes forman un ángulo de 90º, por lo que:

F_R=√22+82 = √68 =8.25 N

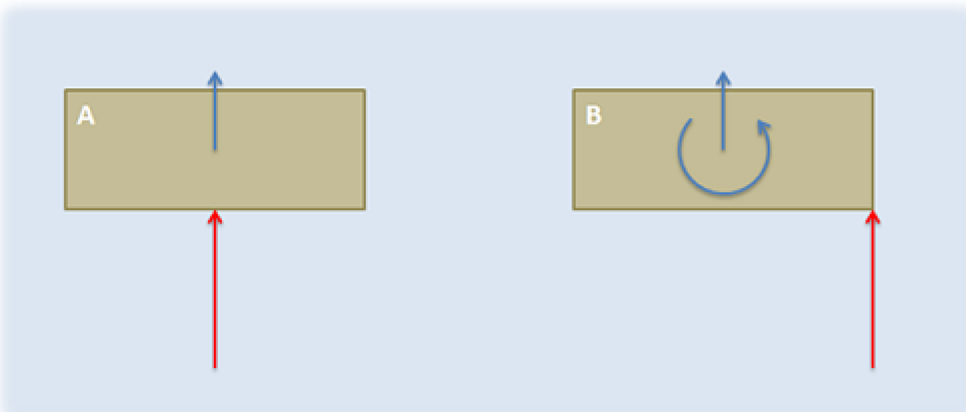


CÁLCULO DEL MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

Con el fin de simplificar el cálculo de los momentos de las fuerzas en el espacio, vamos a asociar el momento de una fuerza respecto a un punto con un vector. Convendremos en que dicho vector tendrá la magnitud del momento y será perpendicular al plano definido por la línea de acción de la fuerza y el punto; y convendremos también que su sentido seguirá la regla de la mano derecha (o del tornillo de rosca derecha).

Momento de una Fuerza en el Espacio

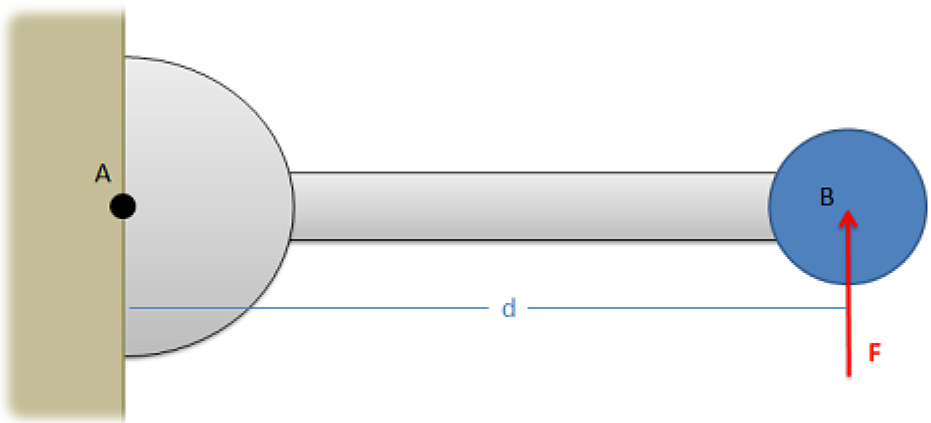
El **momento de una fuerza** es la tendencia de algunas fuerzas a provocar la rotación. Cualquier manera fácil de visualizar el concepto es establecer una caja sobre una superficie lisa. Si aplicara una fuerza al centro de la caja, simplemente se deslizaría por la superficie sin girar. Si en cambio tuvieras que empujar un lado de la caja, ésta comenzará a girar a medida que se mueve. A pesar de que las fuerzas tienen la misma magnitud y dirección, provocan diferentes reacciones. Esto se debe a que la fuerza descentrada tiene un punto de aplicación diferente, y ejerce un momento alrededor del centro de la caja, mientras que la fuerza sobre el centro de la caja no ejerce un momento sobre el punto central de la caja.



Al igual que las fuerzas, los momentos tienen una magnitud (el grado de rotación que causaría) y una dirección (el eje sobre el que giraría el cuerpo). Determinar la magnitud y dirección de estos momentos sobre un punto dado es un paso importante en el análisis de los sistemas de cuerpos rígidos (cuerpos que son rígidos y que no experimentan fuerzas concurrentes). El método escalar a continuación es la forma más fácil de hacer esto en problemas bidimensionales simples, mientras que los métodos vectoriales alternativos, que se cubrirán más adelante, funcionan mejor para sistemas tridimensionales más complejos.

El Método Escalar en 2 Dimensiones

Al discutir cómo calcular el momento de una fuerza alrededor de un punto a través de cantidades escalares, comenzaremos con el ejemplo de una fuerza sobre una palanca simple como se muestra a continuación. En esta simple palanca hay una fuerza en el extremo de la palanca,d distancia del centro de rotación para la palanca (punto A) donde la fuerza tiene una magnitud.

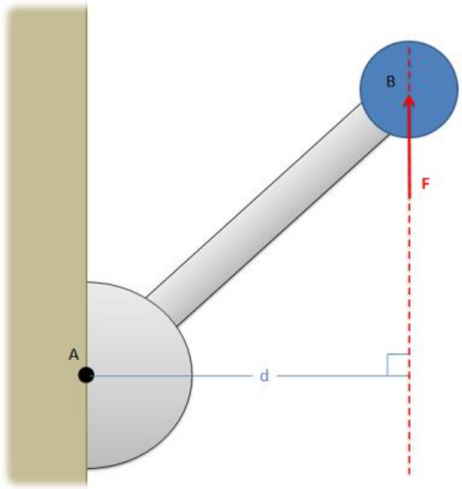


Al usar cantidades escalares, la magnitud del momento será igual a la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el punto sobre el que estamos tomando el momento.

$M=F*d$

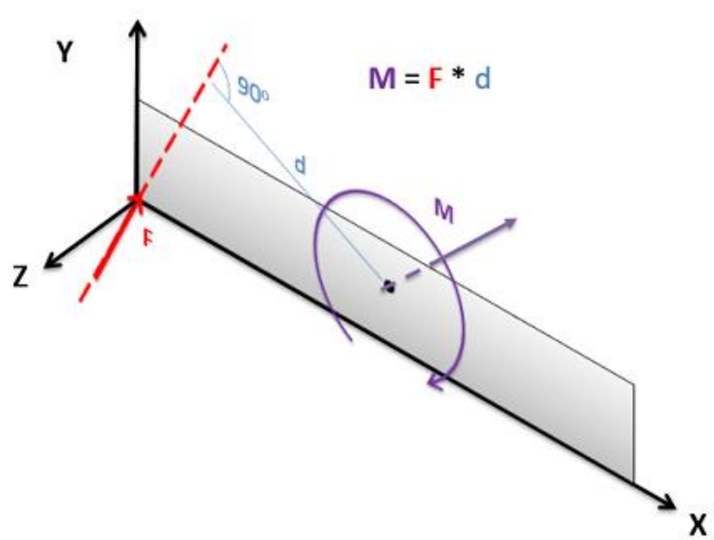
Para determinar el signo del momento, determinamos qué tipo de rotación provocaría la fuerza. En este caso, podemos ver que la fuerza provocaría que la palanca rotara en sentido antihorario alrededor del punto A. Las rotaciones en sentido antihorario son causadas por momentos positivos mientras que las rotaciones en sentido horario son provocadas por momentos negativos.

Otro factor importante para recordar es que el valor d es la distancia perpendicular desde la fuerza hasta el punto sobre el que estamos tomando el momento. Podríamos medir la distancia desde el punto A hasta la cabeza del vector de fuerza, o la cola del vector de fuerza, o realmente cualquier punto a lo largo de la línea de acción de fuerzaF. La distancia que necesitamos utilizar para el cálculo del momento escalar, sin embargo, es la distancia más corta entre el punto y la línea de acción de la fuerza. Esta siempre será una línea perpendicular a la línea de acción de la fuerza, yendo al punto sobre el que estamos tomando el momento.



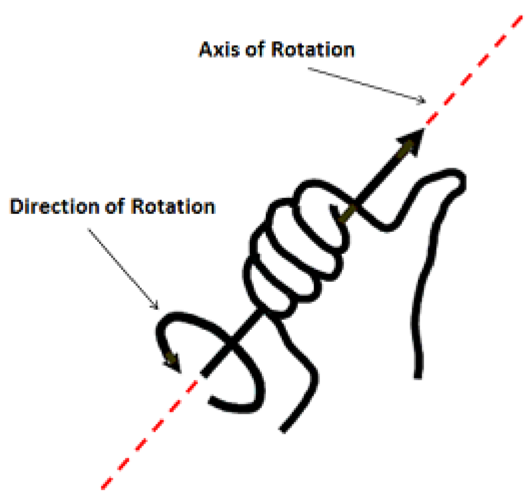
El Modelo Escalar en 3 Dimensiones

Para los cálculos escalares tridimensionales, aún encontraremos la magnitud del momento de la misma manera, multiplicando la magnitud de la fuerza por la distancia perpendicular entre el punto y la línea de acción de la fuerza. Esta distancia perpendicular nuevamente es la distancia mínima entre el punto y la línea de acción de la fuerza. En algunos casos, encontrar esta distancia puede ser muy difícil.



Otro factor difícil en los problemas escalares tridimensionales es encontrar el eje de rotación, ya que este es ahora más complejo que solo “en sentido horario o antihorario”. El eje de rotación será una línea que recorre el punto sobre el que estamos tomando el momento, y perpendicular tanto al vector de fuerza como al vector de desplazamiento perpendicular (el vector va desde el punto sobre el que se tomó el momento hasta el punto de aplicación de la fuerza). Si bien esto es posible en cualquier situación, se vuelve muy difícil si los vectores de fuerza o desplazamiento no se encuentran en una de las tres direcciones de coordenadas.

Para encontrar aún más la dirección del vector de momento (que actuará a lo largo de la línea establecida para el eje de rotación), utilizaremos la regla de la derecha en una forma modificada. Envuelve los dedos de tu mano derecha alrededor del eje de la línea de rotación con las yemas de los dedos curvadas en la dirección en la que giraría el cuerpo. Si haces esto, tu pulgar debe apuntar a lo largo de la línea en la dirección del vector momento. Este es un último paso importante, ya que podemos girar en sentido horario o antihorario alrededor de cualquier eje de rotación dado. Con el vector de momento final, conocíamos no sólo el eje de rotación, sino en qué dirección giraría el cuerpo alrededor de ese eje.



Para usar la regla de la derecha, alinee su mano derecha como se muestra para que su pulgar se alinee con el eje de rotación por el momento y sus dedos rizados apunten en la dirección de rotación para su momento. Si haces esto, tu pulgar estará apuntando en la dirección del vector momento.

Consideremos nuevamente el caso del momento de una fuerza en el plano cartesiano. Sea la fuerza de magnitud F, cuya línea de acción pasa por el punto P de coordenadas P(x, y) y cuyas componentes son Fx y Fy. Conforme al teorema de Varignon (el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto al mismo punto):

que se puede escribir así:

$$M_oF = M_oF_x + M_oF_y$$
$$M_oF = -yF_x + xF_y$$

y el vector asociado a este momento, según vimos en el apartado anterior, es:

$$M_oF = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

Téngase presente que al decir que es el momento de la fuerza con respecto al punto O, nos estamos refiriendo en realidad al momento de la fuerza con respecto al eje de las zetas.

El lector podrá comprobar fácilmente que, si repetimos el procedimiento con fuerzas contenidas en los otros planos cartesianos o en planos paralelos a ellos, se obtendría:

$$\overline{M_{x'x}F} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i}$$

$$\overline{M_{y'y}F} = \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \mathbf{j}$$

Diremos que el momento de la fuerza respecto al origen O será la suma vectorial de los momentos de la fuerza con respecto a los ejes coordenados:

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\overline{M_oF} = \overline{M_{x'x}F} + \overline{M_{y'y}F} + \overline{M_{z'z}F}$$

es decir

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_y \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

que vamos a concentrar, dándole la forma de un determinante:

$$\overline{M_oF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Nótese que el segundo renglón contiene las coordenadas de un punto de la línea de acción de la fuerza. Y se pueden considerar las componentes de un vector que une el centro de momentos (en este caso el origen) con un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza, y lo llamaremos vector de posición:

$$\bar{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esta operación con vectores se denomina producto vectorial y se simboliza así:

$$\overline{M_oF} = \bar{r} \text{ x } \bar{F}$$

También se llama producto cruz, dado el símbolo que se utiliza. Evidentemente, la magnitud del vector momento tiene que resultar igual al producto de la magnitud de la fuerza por la distancia de su línea de acción al punto. Gráficamente, corresponde al área del rectángulo cuyos lados son la fuerza y la distancia. Pero como el vector de posición r va del centro de momentos a cualquier punto de la línea de acción de la fuerza, y d es igual a r sen θ, se tiene que la magnitud del producto cruz es igual al producto de las magnitudes de los factores por el seno del ángulo que forman entre sí.

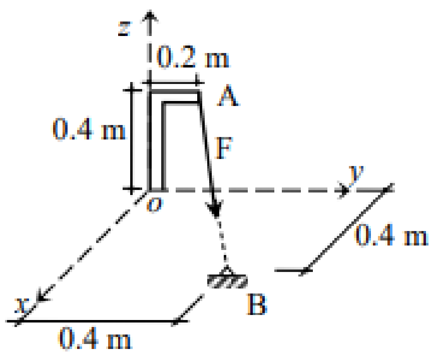
Simbólicamente:

$$\left|\overline{\bar{r}\ \mathrm{x}\ \bar{F}}\right| = Fr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y es igual al área del paralelogramo formado con esos dos vectores.

Ejemplo

Ejemplo. Diga qué vector representa el momento de la fuerza F, de 24 kg, respecto al origen del sistema de referencia. Y diga también cuáles son los momentos de esa fuerza con respecto a cada uno de los ejes cartesianos.



El vector fuerza es

$$\bar{\mathrm{F}} = 24\left(\frac{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}}{\sqrt{2(0.4^2) + 0.2^2}}\right)$$
$$= 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

Y podemos elegir como vector de posición al

$$\bar{r} = \overline{\mathrm{OA}} = 0.2\mathbf{j} + 0.4\mathbf{k}$$

$$\overline{M_oF} = \bar{r}\ \mathrm{x}\ \bar{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 16 & 8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_oF} = -6.4\mathbf{i} + 6.4\mathbf{j} - 3.2\mathbf{k}\ [\mathrm{kg{\cdot}m}]}$$

}

TRABAJO DE UNA FUERZA EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

El trabajo de una fuerza en el plano se calcula multiplicando el producto escalar de la fuerza aplicada y el desplazamiento de un objeto.

La fórmula para el trabajo de una fuerza en el plano es:
Trabajo = Fuerza · Desplazamiento · cos(θ)

Donde:

- Fuerza es el módulo de la fuerza aplicada.
- Desplazamiento es el vector que representa la magnitud y dirección del desplazamiento del objeto.
- θ es el ángulo entre la fuerza aplicada y la dirección del desplazamiento.

En el caso del trabajo de una fuerza en el espacio, se utiliza la misma fórmula, pero se considera también la componente de la fuerza perpendicular al desplazamiento. Es decir, se suma el trabajo realizado en el plano con el trabajo realizado por la fuerza perpendicular.

Trabajo total = Trabajo en el plano + Trabajo perpendicular
El trabajo perpendicular se calcula como:
Trabajo perpendicular = Fuerza perpendicular · Desplazamiento

Donde:

- Fuerza perpendicular es el módulo de la componente de la fuerza perpendicular al desplazamiento.
  En resumen, el trabajo de una fuerza en el plano se calcula multiplicando el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento, teniendo en cuenta el ángulo entre ambos. En el espacio, se suma el trabajo en el plano con el trabajo perpendicular.

CONCLUSION

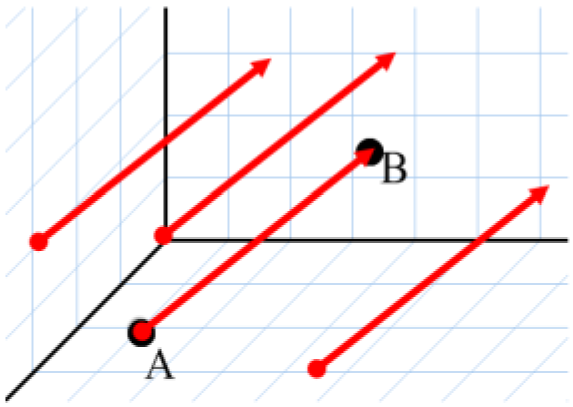
Para concluir, los vectores en el espacio son herramientas matemáticas fundamentales que nos permiten representar y comprender de manera efectiva la dirección y magnitud de cantidades físicas en un espacio tridimensional. Estos objetos geométricos tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas, desde la física y la ingeniería hasta la informática y la biología.

En primer lugar, los vectores en el espacio nos proporcionan una manera precisa de describir movimientos y desplazamientos en un mundo tridimensional. En física, por ejemplo, los vectores se utilizan para representar fuerzas, velocidades y aceleraciones, lo que permite analizar y predecir el comportamiento de objetos en movimiento. En ingeniería, los vectores son esenciales para diseñar estructuras y sistemas que deben funcionar en un espacio tridimensional, como puentes, aviones y robots.

Otra aplicación importante de los vectores en el espacio es la resolución de problemas geométricos y de trigonometría. Los vectores nos permiten calcular distancias, ángulos y áreas en contextos tridimensionales, lo que es esencial en la navegación, la cartografía y la astronomía. También son fundamentales en la resolución de problemas de geometría analítica, como encontrar la ecuación de una recta o un plano en el espacio.

En el campo de la informática y la programación, los vectores juegan un papel crucial en la representación de datos y la resolución de problemas espaciales. Por ejemplo, se utilizan en gráficos por computadora para representar la posición y orientación de objetos tridimensionales, lo que es esencial en la industria del entretenimiento y los videojuegos. Además, los algoritmos de aprendizaje automático a menudo utilizan vectores para representar características de datos en espacios multidimensionales, lo que permite el análisis y la clasificación de grandes conjuntos de datos.

En conclusión, los vectores en el espacio son una herramienta matemática versátil y poderosa con una amplia variedad de aplicaciones en ciencia, tecnología e ingeniería. Su capacidad para representar magnitudes y direcciones en un espacio tridimensional los convierte en una herramienta esencial para modelar y resolver problemas en diversas disciplinas. Desde la física hasta la informática, los vectores en el espacio siguen desempeñando un papel fundamental en la comprensión y transformación del mundo que nos rodea.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

J. STEWART, *CALCULO DE VARIAS VARIABLE TRASCENDENTES TEMPRANAS*. CENGAGE, 2012.

Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas, 7ma Edición - James Stewart-[www.libreriaing[1].pdf

"Fuerzas en el espacio". Untitled Document. Accedido el 22 de septiembre de 2023. [En línea].

Disponible: http://profesores.dcb.unam.mx/users/juanoc/archivos/curso/7%20Fuerzas%20en%20el%20espacio.pdf

"Ejercicio: Varios ejemplos de suma de fuerzas". Fisicalab | Web de Física y Matemáticas. Accedido el 23 de septiembre de 2023. [En línea]. Disponible: https://www.fisicalab.com/ejercicio/1525

Untitled Document. Accedido el 23 de septiembre de 2023. [En línea]. Disponible: http://profesores.dcb.unam.mx/users/juanoc/archivos/curso/7%20Fuerzas%20en%20el%20espacio.pdf

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

<table>
<tr><td colspan="3">DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO</td><td colspan="3">ASIGNATURA: CALCULO VECTORIAL</td></tr>
<tr><td colspan="6">DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="4">NOMBRE DEL ALUMNO (A): TEOBA HERRERA ROCIO</td><td colspan="2">Problemario de la Unidad: 1</td></tr>
<tr><td>PERIODO: SEPTIEMBRE 2023-ENERO 2024</td><td colspan="2">GRUPO:311 A</td><td colspan="3">FECHA DE ENTREGA: 01/10/2023</td></tr>
<tr><td colspan="6">INSTRUCCIONES</td></tr>
<tr><td colspan="6">Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">VALOR DEL REACTIVO</td><td rowspan="2">CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)</td><td colspan="2">CUMPLE</td><td colspan="2">OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5 %</td><td>PRESENTACIÓN: El trabajo cumple con los requisitos de
a. Buena presentación
b. No tiene faltas de ortografía
c. Ordenado y limpio</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5 %</td><td>FORMATO DE ENTREGA: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>10 %</td><td>DESARROLLO DE EJERCICIOS: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5 %</td><td>RESULTADO: El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5 %</td><td>RESPONSABILIDAD: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>30 %</td><td>CALIFICACIÓN</td><td colspan="4">30%</td></tr>
</table>

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA ITSS

Ingeniería mecatrónica IMCT-2010-229 Grupo: 311A

PROBLEMARIO DE LA UNIDAD I

Calculo Vectorial

Docente:

ING. Pablo Promotor Campechano

Presenta:

Juan José Marcial Fiscal	**221u0547**
Roció Teoba Herrera	**221u0562**
Juan José Jiménez Reyes	**221u0541**
Perla Joselin Quino Caixba	**221u0555**
Osswill Uriel Ventura Gracia	**221u0566**

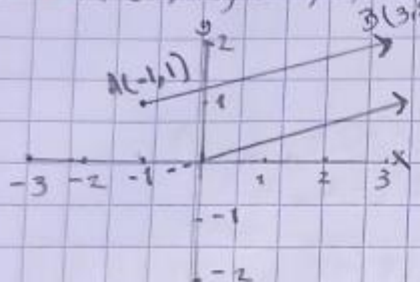
San Andrés Tuxtla Veracruz **01 de octubre de 2023**

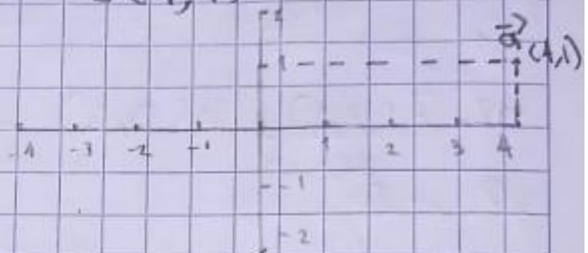
Problemario Unidad 1

9.14 Encuentre un vector "a" con la representación dada por el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$. Dibuje $\overrightarrow{AB}$ y la representación equivalente empezando en el origen.

$$\overrightarrow{AB} = (3-(-1), 2-1)$$
$$= (4, 1)$$

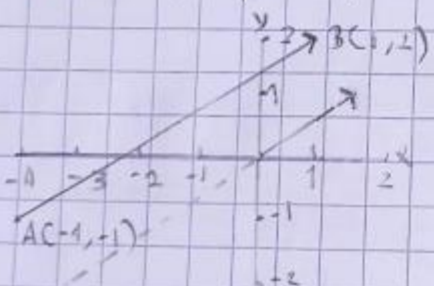
9. $A(-1,1), B(3,2)$

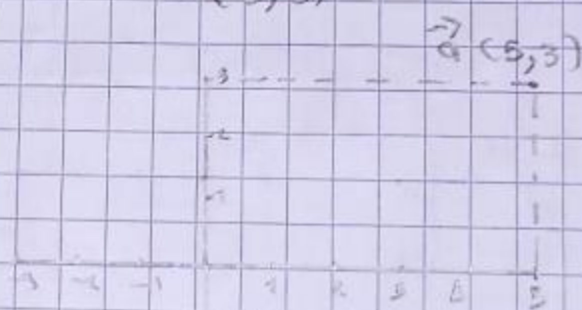




10. $A(-4,-1), B(1,2)$

$$\overrightarrow{AB} = (1-(-4), 2-(-1))$$
$$= (5, 3)$$





Encontrar :

19. $a + b$, $a = \langle 5, -12 \rangle$ $b = \langle -3, -6 \rangle$

$= 5i - 12j + (-3i - 6j)$

$= 5i - 12j - 3i - 6j$

$= 2i - 18j$

20. $2a + 3b$, $a = 4i + j$ $b = i - 2j$

$= 2(4i + j) + 3(i - 2j)$

$= 8i + 2j + 3i - 6j$

$= 11i - 4j$

21. $|a|$, $a = i + 2j - 3k$ $b = -2i - j + 5k$

$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9}$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$

$|\vec{a}| = 3.7416$

23-25 Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado

23. $-3i + 7j$

① $\vec{a} = (2, 7)$

$\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

② $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 7^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 49}$

$|\vec{a}| = \sqrt{53}$

③ $\vec{u} = \dfrac{2}{\sqrt{53}}\vec{i} + \dfrac{7}{\sqrt{53}}\vec{j}$

$= 1$

24. $<-4, 2, 4>$

① $\|\vec{v}\| = \|(-4, 2, 4)\| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16}$

$= \sqrt{36}$

② $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{(-4, 2, 4)}{\sqrt{36}} = \left(\dfrac{-4}{\sqrt{36}}, \dfrac{2}{\sqrt{36}}, \dfrac{4}{\sqrt{36}}\right) =$

$\dfrac{-1}{\sqrt{36}} \cdot \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}} = \dfrac{\sqrt{36}}{(\sqrt{36})^2} = \dfrac{\sqrt{36}}{36}$

$= \left(-\sqrt{36}/9, \sqrt{36}/18, \sqrt{36}/9\right)$

PRODUCTO -escalar

Se dan los vectores a y b. Realizar el producto escalar.

a) $a = \langle 6, -2, 3 \rangle$, $b = \langle 2, 5, -1 \rangle$

$a \cdot b = \langle 6, -2, 3 \rangle \cdot \langle 2, 5, -1 \rangle$

$a \cdot b = (6)(2) + (-2)(5) + (3)(-1)$

$a \cdot b = 12 - 10 - 3$

$\boxed{a \cdot b = -1}$

b) $a = \langle 4, 1, \frac{1}{4} \rangle$, $b = \langle 6, -3, -8 \rangle$

$a \cdot b = \langle 4, 1, \frac{1}{4} \rangle \cdot \langle 6, -3, -8 \rangle$

$a \cdot b = (4)(6) + (1)(-3) + \left(\frac{1}{4}\right)(-8)$

$a \cdot b = 24 - 3 - 2$

$\boxed{a \cdot b = 19}$

Encontrar :

Se dan los vectores a y b, realizar el producto vectorial

1. $a = \langle 6, 0, -2 \rangle$, $b = \langle 0, 8, 0 \rangle$

$$a \times b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = i[(0)(0) - (-2)(8)] - j[(6)(0) - (-2)(0)] + k[(6)(8) - (0)(0)]$$

$$a \times b = i[0 + 16] - j[0 + 0] + k[48 - 0]$$

$$a \times b = 16i - 0 + 48k$$

$$a \times b = \langle 16, 0, 48 \rangle$$

2. $a = \langle 1, 1, -1 \rangle$, $\langle 2, 4, 6 \rangle$

$$a \times b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$a \times b = i[(1)(6) - (-1)(4)] - j[(1)(6) - (-1)(2)] + k$

$[(1)(4) - (1)(2)]$

$a \times b = i[6 + 4] - j[6 + 2] + k[4 - 2]$

$a \times b = 10i - 8j + 2k$

$a \times b = \langle 10, -8, 2 \rangle$

3. $a = i + 3j - 2k$, $b = -i + 5k$

$$a \times b = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$a \times b = i[(3)(5) - (-2)(0)] - j[(1)(5) - (-2)(-1)] + k$

$[(1)(0) - (3)(-1)]$

$a \times b = i[15 + 0] - j[5 - 2] + k[0 + 3]$

$a \times b = 15i - 3j + 3k$

Ecuaciones Paramétricas y Simétricas de la RECTA en el espacio

En los siguientes ejercicios, encuentre las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta en el espacio.

a) La recta que pasa por el punto $(6, -5, 2)$ y es paralela al vector $\langle 1, 3, -2/3 \rangle$.

datos

$P_0\ (6, -5, 2)$ $\quad x_0 = 6,\ y_0 = -5,\ z_0 = 2$

$v = \langle 1, 3, -\frac{2}{3} \rangle$ $\quad a = 1,\ b = 3,\ c = -2/3$

ecuaciones paramétricas

$x = x_0 + at = 6 + 1t \longrightarrow \boxed{x = 6 + t}$

$y = y_0 + bt = -5 + 3t \longrightarrow \boxed{y = -5 + 3t}$

$z = z_0 + ct = 2 - \frac{2}{3}t \longrightarrow \boxed{z = 2 - \frac{2}{3}t}$