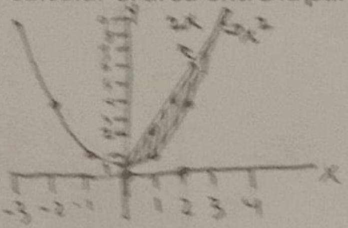
INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA
DIRECCIÓN ACADÉMICA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MATERIA: CÁLCULO INTEGRAL UNIDAD No. 3

ESPECIALIDAD: Electromecanico GRUPO: 202B FECHA: 20/05/24
NOMBRE DEL ALUMNO(A): Ariana Guadalupe Velasco Velasco 50

1.- Calcular el área entre la parábola $y = X^2$ y la recta $y=2x$ (realizar la gráfica). 30%

$x^2 = 2x$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x-2) = 0$
$x = 0$
$x = 2$



x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$y = x^2$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6

$y = 2x$

$$\int_0^2 [2x - x^2]\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[2^2 - \frac{2^3}{3}\right] - 0 = \left[4 - \frac{8}{3}\right] = \frac{4}{3} = 1.3u^2$$

2.- Calcular el área bajo la curva de la función $y = 4x - x^2$, el eje X y las rectas x=0 y x= 4 (realizar la gráfica). 20%

$$\int_0^4 [4x - x^2]\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$
$$= \left[2(4)^2 - \frac{(4)^3}{3}\right] - 0 = \left[32 - \frac{64}{3}\right] = \frac{32}{3} = 10.6u^2$$

x	y
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0

Unidad 3

Aplicaciones de la integral

15 04 24

Scribe

3.1 ÁREAS

Para el cálculo de áreas de regiones consideramos en primer lugar el caso en que la región está determinada por la gráfica de una función en $[a, b]$ y el eje x

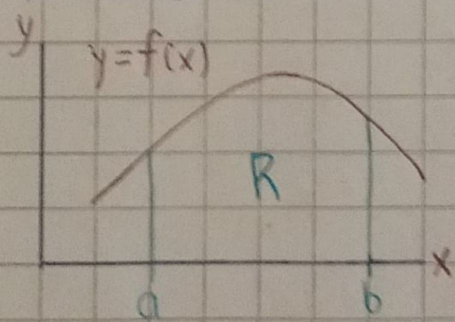
3.1.1 ÁREA BAJO LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

El teorema fundamental del cálculo señala que si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces existe la integral definida:

Fórmula: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

donde f es cualquier función.

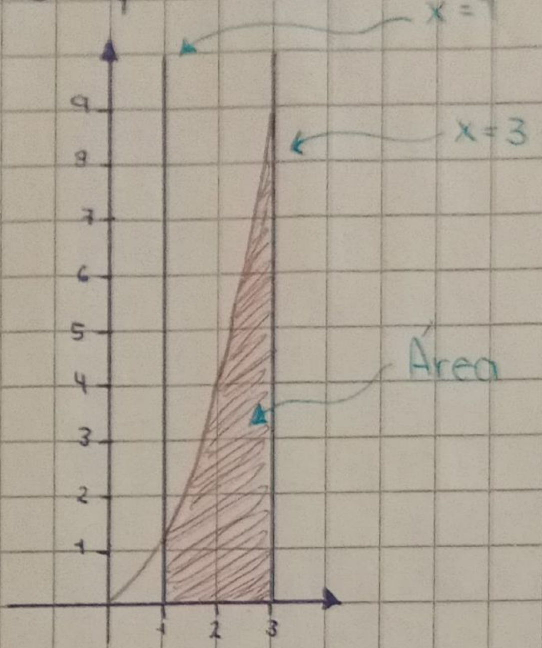
El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva f(x) representada en el plano por la región R la cual está limitada además por el eje "x" y las rectas $x = a$, $x = b$



Ejemplo 1

Calcular el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas: $x - 1 = 0$ y $x - 3 = 0$

X	Y
3	9
2	4
1	1
0	0



$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^3$$

$$= \left[\frac{(3)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1)^3}{3}\right]$$

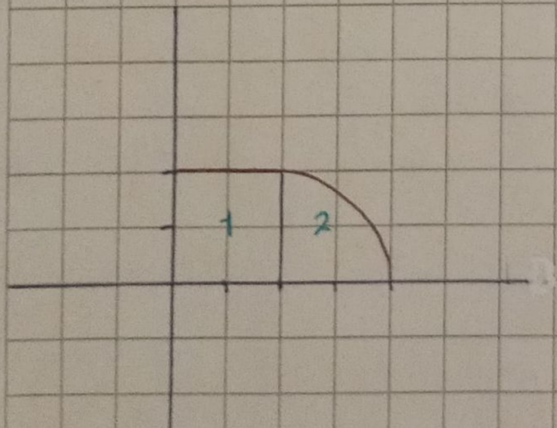
$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{3} u^2 = 8.66 u^2$$

Ejemplo 2

El área de la región comprendida entre el eje "x" y el gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4-(x-2)^2} & ; \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



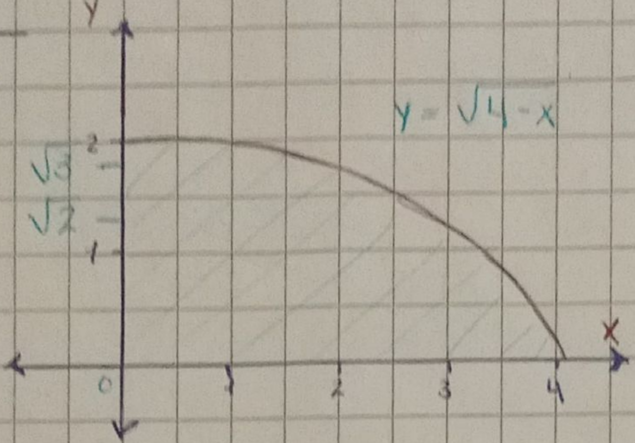
$$A = (2)^2 + \frac{\pi \cdot (2)^2}{4}$$

$$A = 4 + \pi u^2$$

Ejemplo 3

Determina el área acotada por la parábola $y^2 + x - 4 = 0$ y el primer cuadrante del plano cartesiano.

$y = \sqrt{4-x}$



x	y
4	0
3	1
2	$\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}$
0	2

Integrando con respecto a "y"

Dada $y = \sqrt{4-x}$ despejamos la variable "x": $x = 4 - y^2$

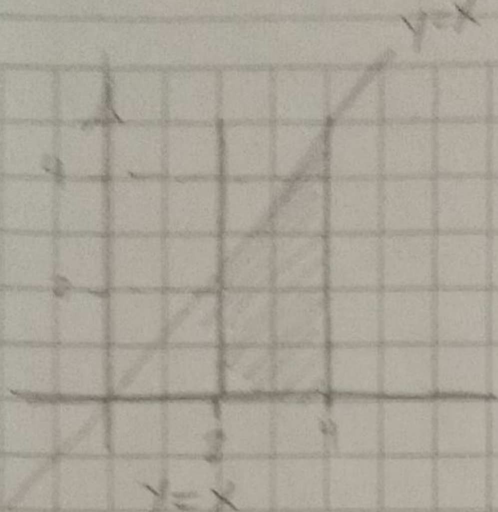
$$\int_0^2 (4 - y^2)\,dy = 4y - \frac{y^3}{3}\Big]_0^2 = \left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - [0] = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5.33\,u^2$$

Integrando con respecto a "x"

$$\int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx = -\frac{2(4-x)^{3/2}}{3}\Big]_0^4 = -\frac{2(4-4)^{3/2}}{3} - \left[\frac{-2(4-0)^{3/2}}{3}\right] = \frac{2(8)}{3} = \frac{16}{3}$$

$= 5.33\,u^2$

16 04 24



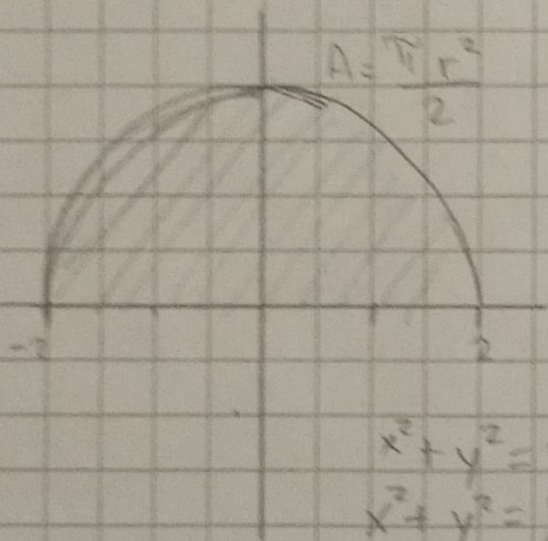
$$\int_2^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_2^4 = \left[\frac{(4)^2}{2}\right] - \left[\frac{(2)^2}{2}\right]$$

$$\frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6u^2$$

$y = x$
$x = 2$
$x = 4$
Eje x

$$A_T = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(4+2)2}{2} = 6u^2$$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\pi = 180^\circ$$
$$\pi/2 = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$x^2 + y^2 = r^2$
$x^2 + y^2 = 4$
$x^2 + y^2 = (2)^2$
$y^2 = 4 - x^2$
$y = \sqrt{4 - x^2}$

D 22 M 04 A 24

Ejemplos

1. Calcular por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 5x$, el eje de las X y la ordenada $x = 6$

Solución
Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ aplicando directamente la fórmula $\boxed{4}$ resulta:

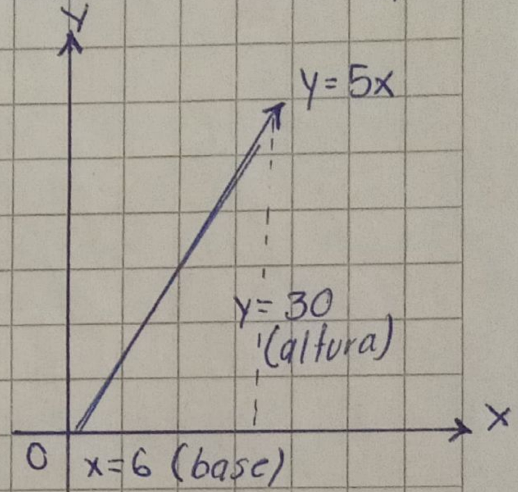
$$\acute{A}rea = \int_a^b y\,dx = \int_0^6 5x\,dx = \left.\frac{5x^2}{2}\right]_a^b = \frac{5(6)^2}{2} - \frac{5(0)^2}{2} = 90$$

Nota: A partir de aquí dejaremos sólo el corchete de la derecha, para indicar los límites.

Para su comprobación tenemos gráficamente:
Aplicando la fórmula: $\acute{A}rea = \frac{(base)(altura)}{2}$

Sustitución:

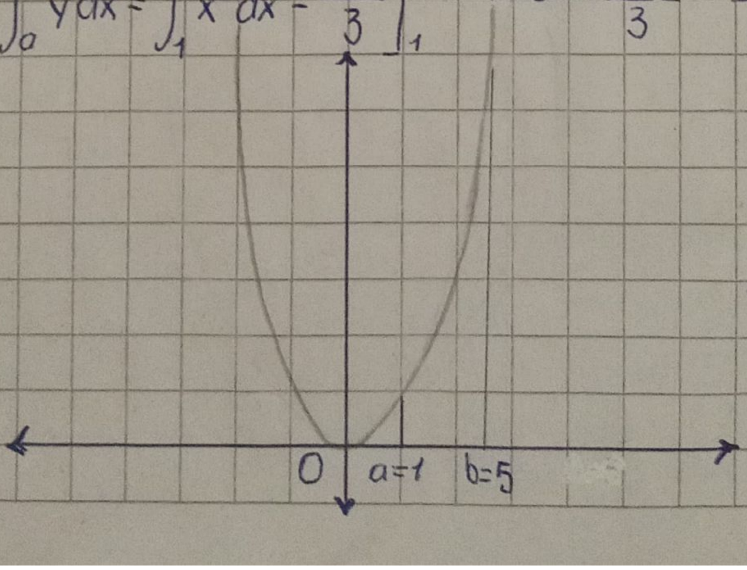
$$\acute{A}rea = \frac{(6)(30)}{2} = 90\,u^2$$



2. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las X y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$

Solución

$$\acute{A}rea = \int_a^b y\,dx = \int_1^5 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^5 \quad \acute{A}rea = \frac{(5}{3} - \frac{(1)^3}{3} = 41\tfrac{1}{3}\,u^2$$



3. Hallar el área limitada por el círculo $x^2+y^2=36$, el eje de las X y las ordenadas $x=-4$ y $x=5$

Solución

Despejando y de la ecuación dada, tenemos $y=\sqrt{36-x^2}$

Sustituyendo:

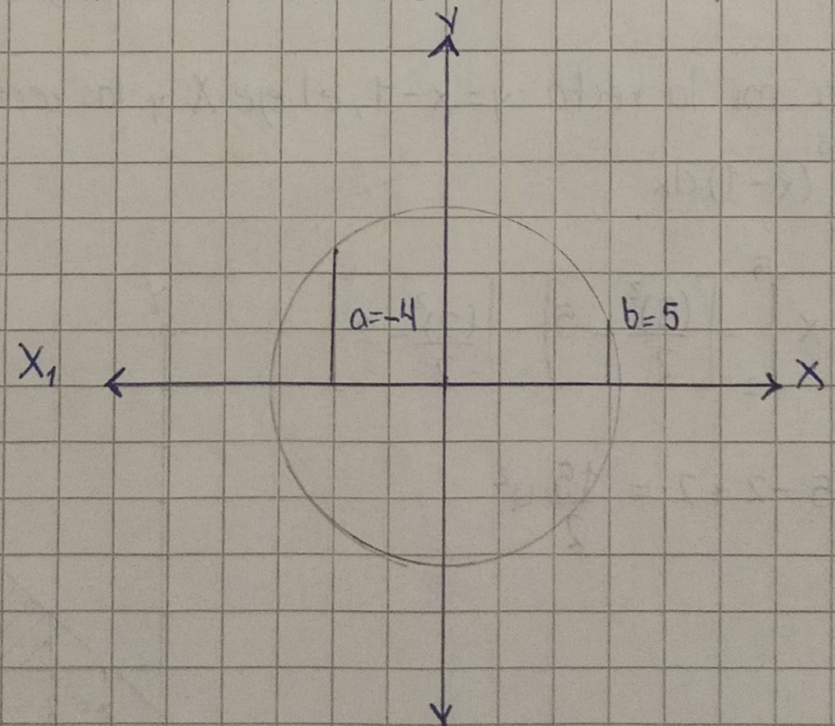
$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{-4}^{5}\sqrt{36-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{36-x^2}+\frac{36}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{6}\Bigg]_{-4}^{5}$$

$$\text{Área} = \frac{5}{2}\sqrt{36-(5)^2}+18\operatorname{arc\,sen}\frac{5}{6}-\frac{(-4)}{2}\sqrt{36-(-4)^2}-18\operatorname{arc\,sen}\frac{-4}{6}$$

$$\text{Área} \approx 8.2915+18(0.9851)+8.9442-18(-0.7297)\approx 48.1025$$

Comparando el área del semicírculo, tenemos:

$$\text{Área del semicírculo} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{(3.1416)(36)}{2} \approx 56.486$$



1. El área formada por la curva $y=4x-x^2$, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=4$ es:

Solución:

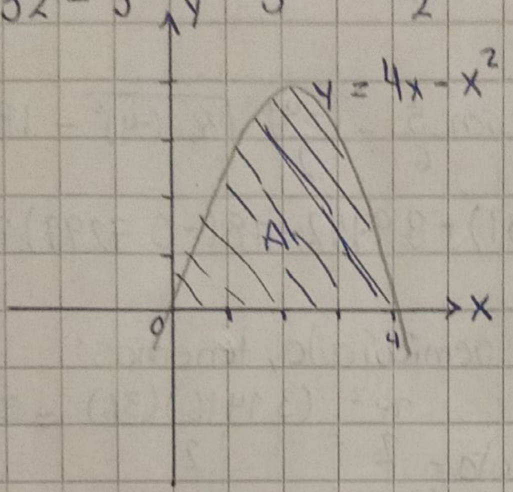
El área dada por:

$$A=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$$

Resolviendo:

$$\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left[2(4)^2-\frac{(4)^3}{3}\right]-\left[2(0)^2-\frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$=32-\frac{64}{3}=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{2}\,u^2 \quad o \quad 16u^2$$

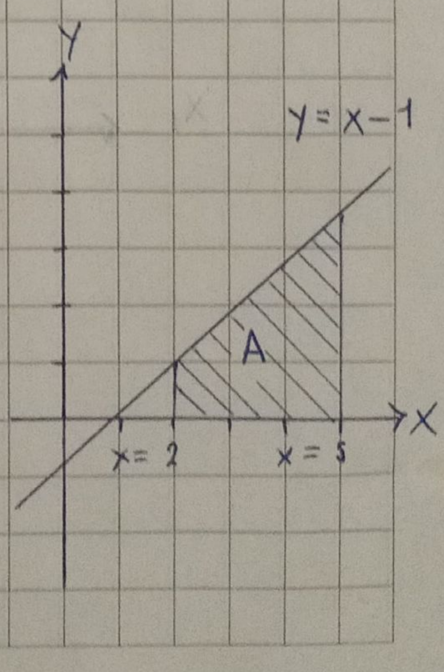


2. El área formada por la recta $y=x-1$, el eje X y las rectas $x=2$ y $x=5$ es:

$$A=\int_2^5 (x-1)\,dx$$

$$\int_2^5 (x-1)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_2^5=\left[\frac{(5)^2}{2}-5\right]-\left[\frac{(2)^2}{2}-2\right]$$

$$=\frac{25}{2}-5-2+2=\frac{15}{2}\,u^2$$

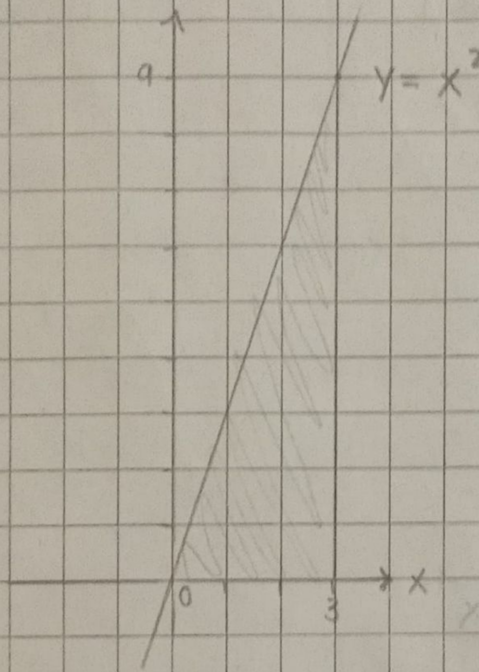


Ejercicios

D 26 M 04 A 24

33. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 3$

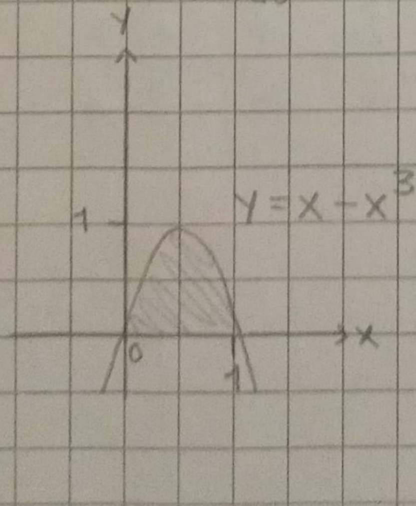
$$A = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left[\frac{(3)^3}{3}\right] - \left[\frac{(0)^3}{3}\right] = \frac{27}{3} = 9u^2$$



35. Curva $y = x - x^3$, rectas $x = 0$, $x = 1$

$$A = \int_0^1 x - x^3 dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}u^2$$



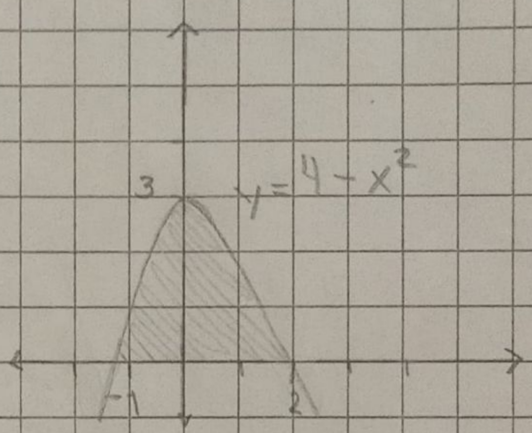
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

34. Área $y = 4 - x^2$, rectas $x = -1$, $x = 2$

$$A = \int_{-1}^{2} 4 - x^2 \, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$\left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-4 + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{24-8}{3}\right] - \left[\frac{-12+1}{3}\right] = \left[\frac{16}{3}\right] - \left[-\frac{11}{3}\right]$$

$$\frac{16}{3} + \frac{11}{3} = \frac{27}{3} = 9u^2$$



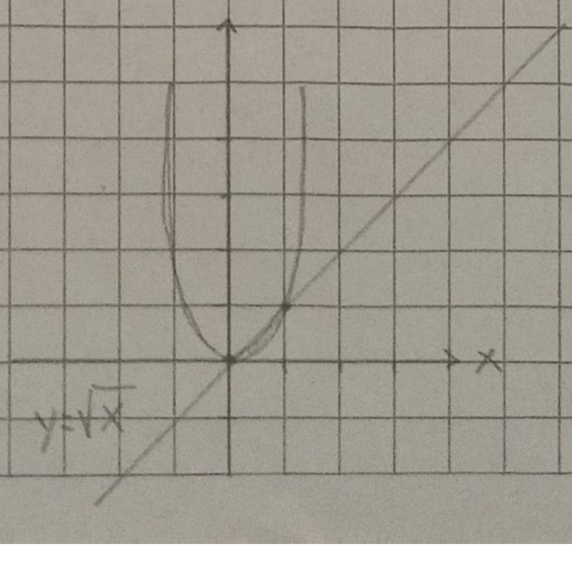
36. Área $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$

$x^2 = \sqrt{x}$
$(x^2)^2 = (\sqrt{x})^2$
$x^4 = x$
$x^4 - x = 0$
$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$
$x = 1$

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2(1)^{3/2}}{3} - \frac{(1)^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^2$$



37. Área $y = 4x - x^2$, $y = x$

$4x - x^2 = x$

$4x - x - x^2 = 0$

$-x^2 + 3x = 0$

$x(-x + 3) = 0$

$x = 3$

$x = 0$

$$A = \int_0^3 -x^2 + 4x - x \, dx = \int_0^3 -x^2 + 3x \, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big]_0^3 = -\frac{(3)^3}{3} + \frac{3(3)^2}{2}$$

$$= -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{27 - 18}{2} = \underline{\frac{9}{2} u^2}$$

LISTA DE COTEJO (PROBLEMARIO)

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		ASIGNATURA: CÁLCULO INTEGRAL	
NOMBRE DEL DOCENTE:		ING. HORACIO SOLÍS DOMÍNGUEZ	
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN			
NOMBRE DEL ALUMNO(A): ARIANA GUADALUPE VELASCO VELASCO		CONTROL: 231U0134	FIRMA DEL ALUMNO(A): Ariana Guadalupe Velasco Velasco
PRODUCTO: PROBLEMARIO	NOMBRE DEL PROYECTO: ÁREAS	FECHA: 20/05/24	PERIODO ESCOLAR: FEB-JUN 2024

INSTRUCCIONES

Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5%	Presentación: El trabajo cumple con los requisitos de: a. Buena presentación	✓		
5%	b. Orden en la secuencia de solución	✓		
5%	c. Legible, limpieza y coherencia.	✓		
10%	Conocimiento del tema: Cantidad de problemas resueltos	✓		
10%	Explicación clara de las soluciones, seleccionados aleatoriamente	✓		
10%	Realización: Interpretación de los resultados	✓		
5%	Responsabilidad: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	✓		
50%	CALIFICACIÓN	50%		

Esta lista de cotejo se utiliza para todas las unidades