INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO

MATERIA: CÁLCULO INTEGRAL

ALUMNO: STUARDO AGUILERA XALA

MATRICULA: 231U0262

ACTIVIDAD: PROBLEMARIO IV

GRUPO: 207 A.

CARRERA: ING. EN GESTIÓN EMPRESARIAL

SAN ANDRÉS TUXTLA, VERACRUZ, A 27 DE MAYO DE 2024.

Escaneado con CamScanner

4.1

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{4n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n} - \sqrt{4n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{4n})}{(\sqrt{n} - \sqrt{4n})(\sqrt{n} + \sqrt{4n})}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{5n} \cdot \sqrt{4n}}{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{4n})^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n^2} + \sqrt{20n^2}}{n - 4n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n^2} + \sqrt{20n^2}}{-3n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{20}) \cdot n}{-3n} = -\frac{\sqrt{5} + \sqrt{20}}{3}$$

$$= -\sqrt{5}$$

En la última igualdad hemos simplificado el resultado.

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{20}}{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 \cdot 4}}{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot 2}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot (1 + 2)}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{3}$$

$$= \sqrt{5}$$

Escaneado con CamScanner

4.2

Serie Finita

Sea f la función definida por $f(x) = 2m \; m'' (1, 2, 3, 4)$

$f(1) = 2 . 1 = 2$

$f(2) = 2 . 2 = 4$

$f(3) = 2 . 3 = 6$

$f(4) = 2 . 4 = 8$

$(2, 4, 6, 8)$

$f(x) = 2m \; m'' (1, 2, 3, 4)$ es una serie finita donde m pertenece a cualquier número del intervalo $[1, 4]$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , \forall x$$

$$\tan x = \sum_{n=20}^{\infty} \frac{B_{2n} (-4)^n (1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

$$, \text{ para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

Escaneado con CamScanner

Serie Infinita

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 0.5 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = 1 + 0.5 + 0.25 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_4 = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$S_5 = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Escaneado con CamScanner

4.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{3n-1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$D_x \frac{\sqrt{x}}{3x-1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-1) - 3\sqrt{x}}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{(3x-1)-6x}{2\sqrt{x}(3x-1)^2} = \frac{-1-3x}{2\sqrt{x}(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{1+3x}{2\sqrt{x}(3x-1)^2} < 0 \text{ en } \left(-\frac{1}{3}, \infty\right);$$

$\rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x-1}$ es decreciente en $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$;

$$\therefore \frac{\sqrt{n+1}}{3(n+1)-1} < \frac{\sqrt{n}}{3n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{3x-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6\sqrt{x}} = 0;$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n-1} = 0 \quad (3)$$

Entonces, de (2) y (3), y de acuerdo con el teorema: Criterio de Leibniz de las series alternantes, se concluye que, la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$$ es convergente.

4.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 (x-c)^0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

Ejercicio:

¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ conv?

Solución $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$ Entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(x-3)^n \cdot (x-3) \cdot n}{(n+1) \cdot (x-3)^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot (x-3 \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x-3|$$

$$= 1 \cdot |x-3| = |x-3|$$

Entonces: $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

Así: $|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < -1 \iff 2 < x < 4$

Extremos: $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Convergente

Escaneado con CamScanner

$$x = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{Divergente}$$

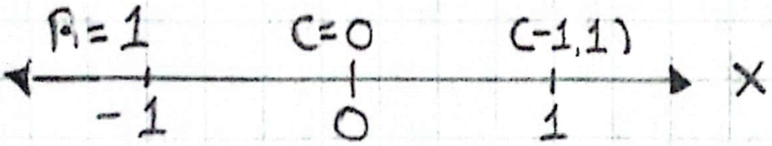
$$R/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \rightarrow \text{Convergente si } x \in [2,4[$$

4.5

Calcular el radio de convergencia, intervalo de convergencia y definir el valor en que se centra la serie. Utilizar el criterio de la raíz o del cociente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n+1}{a_n} \right| < 1 \qquad a_n = \frac{x^n}{n^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$



Intervalo de Convergencia $[-1,1]$

Radio de Convergencia $R=1$

Centro $C=0$

Sustituir los valores extremos

$X=-1$

Alternadas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n^2} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n^2+2n+1}$$

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

Escaneado con CamScanner

$x = 1$ $\quad \rho = \text{Serie}\,$2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^2} \qquad \frac{1}{n^2} \qquad \rho = 2$$

4.6

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

1. $F(0) = e^0 = 1$
2. $F'(0) = e^0 = 1$
3. $F''(0) = e^0 = 1$
4. $F'''(0) = e^0 = 1$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Escaneado con CamScanner

4.7

$y' = y^2 - x^2 : x_0 = 0. \ y_0 = 1,$

$y'' = 2yy' - 2x$

$y''' = 2yy'' + 2(y')^2 - 2$

$y^{(4)} = 2yy''' + 6y'y'',$

$y^{(5)} = 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6(y'')^2,$

$y_0 = 1, \quad y_0' = 1, \quad y_0'' = 2 \quad y_0''' = 4,$

$y_0^{(4)} = 20, \quad y \ y_0^{(5)} = 96$

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4$$

Escaneado con CamScanner

4.8

Calcule la serie de maclaurin para e^x

Solución

Si $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ para toda x, por tanto, $f^{(n)}(0) = 1$ para toda n. Así, de la ecuación de maclaurin se tiene la serie de maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Obtenga la serie de Taylor para sen x en a.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, y así sucesivamente. De este modo, de la fórmula de Taylor,

$c_0 = \operatorname{sen} a$, $c_1 = \cos a$, $c_2 = (-\operatorname{sen} a)/2!$,

$c_3 = (-\cos a)/3!$, $c_4 = (\operatorname{sen} a)/4!$, etc.

Escaneado con CamScanner

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: **HUMBERTO VEGA MULATO**		ASIGNATURA: Calculo integral
	DATOS GENER ALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN	
	NOMBRE DEL ALUMNO: Aguilera Xala Stuardo	**UNIDAD: CUATRO**
PERIODO: febrero-junio2024 / **GRUPO:207-A**		**FECHA DE ENTREGA:31 de mayo 2024**
	INSTRUCCIONES	
	Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.	

VALOR DEL REACTIVO		CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE SI	CUMPLE NO	OBSERVACIONES
4%		**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	X		
4%		**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
20%		**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
8%		**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
4%		**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
40%		**CALIFICACIÓN**	40		

4.4 SERIE DE POTENCIAS

INTEGRANTES

AGUILERA XALA STUARDO

ALANIZ RODRÍGUEZ MILAGROS MONTSERRAT

COYOLT ZACARÍAS DANA MICHELLE

TOTO BAUTISTA YESENIA

SERIES DE POTENCIAS

En el tema de polinomios de Taylor y aproximación, se presentó el concepto de aproximación de las funciones por medio de polinomios de Taylor. Por ejemplo, la función f(x) = ex puede ser aproximada por sus polinomios de Maclaurin como sigue.

$$e^x \approx 1 + x \qquad \text{Polinomio de grado 1.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad \text{Polinomio de grado 2.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \qquad \text{Polinomio de grado 3.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \qquad \text{Polinomio de grado 4.}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \qquad \text{Polinomio de grado 5.}$$

En ese tema, se vio que la aproximación es tanto mejor cuanto mayor es el grado del polinomio.

En este tema se verá que varios tipos importantes de funciones, incluyendo:

f(x) = ex

pueden ser representadas exactamente por medio de una serie infinita llamada **serie de potencias.** Por ejemplo, la representación de serie de potencias para ex es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Para cada número real x puede mostrarse que la serie infinita a la derecha converge al número ex. Sin embargo, antes de hacer esto se tratan algunos resultados preliminares relacionados con series de potencias, empezando con la definición siguiente.

Definición de series de potencias

Si x es una variable, entonces una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Se llama **serie de potencias**. De manera más general, una serie infinita de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

Se llama **serie de potencias centrada en c**, donde c es una constante.

NOTA: Para simplificar la notación para series de potencias, se establece que (x – c)0 = 1, aun cuando x = c.

EJEMPLO 1 Series de potencias

a) La serie de potencias siguiente está centrada en 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

b) La serie de potencias siguiente está centrada en – 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots$$

c) La serie de potencias siguiente está centrada en 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

Radio e intervalo de convergencia

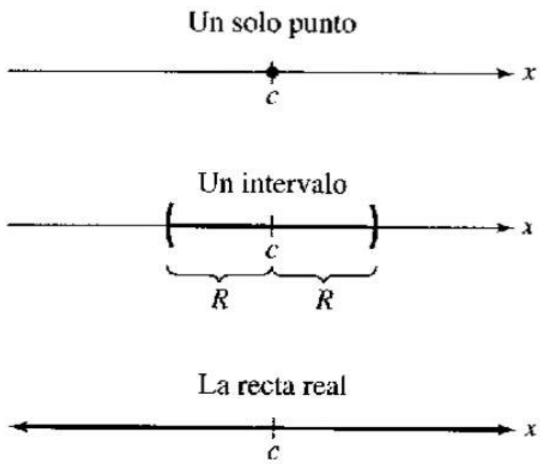
Una serie de potencias en x puede verse como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

Donde el dominio de f es el conjunto de todas las x para que la serie de potencias converge. La determinación del dominio de una serie de potencias es la preocupación prima en este tema. Claro está que, cada serie de potencias converge en su centro c porque:

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n \\ &= a_0(1) + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\ &= a_0. \end{aligned}$$

Así, c siempre queda en el dominio de f. El importante teorema siguiente establece que el dominio de una serie de potencias puede tomar tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real, como se muestra a continuación:



El dominio de una serie de potencias tiene sólo tres formas básicas: un solo punto, un intervalo centrado en c, o toda la recta real.

TEOREMA 9.20 Convergencia de una serie de potencias

Para una serie de potencias centrada en c, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

1. La serie converge sólo en c.
2. Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $[x - c] < R$, y diverge para $[x - c] > R$.
3. La serie converge absolutamente para todo x.

El número R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si la serie sólo converge en c, el radio de convergencia es $R = 0$, y si la serie converge para todo x, el radio de convergencia es $R = \infty$. El conjunto de todos los valores de x para los cuales la serie de potencias converge es el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

<u>EJEMPLO 2</u> Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solución   Para x = 0, se obtiene:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!0^n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to\infty} (n+1)$$
$$= \infty.$$

Para cualquier valor fijo de x tal que [x] > 0, sea $u_n = n!x^n$. Entonces:

Por consiguiente, por el criterio del cociente, la serie diverge para [x] > 0 y sólo converge en su centro, 0. Por tanto, el radio de convergencia es R = 0.

EJEMPLO 3   Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n.$

Solución   Para x ≠ 2, sea u_n = 3(x – 2)^n. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} |x-2|$$
$$= |x-2|.$$

Por el criterio del cociente, la serie converge si [x – 2] < 1 y diverge si [x – 2] > 1. Por consiguiente, el radio de convergencia de la serie es R = 1.

EJEMPLO 4   Hallar el radio de convergencia

Hallar el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

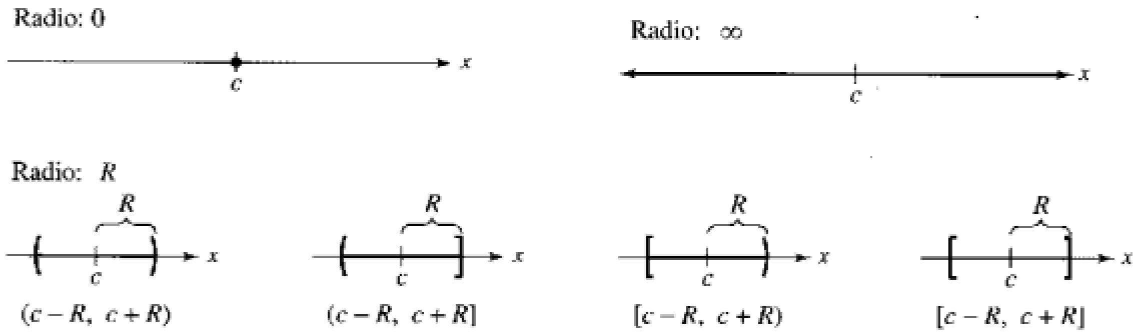
Solución   Para $u_n = (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}.$$

Para cualquier valor fijo x, este límite es 0. Por el criterio del cociente, la serie converge para todo x. Por consiguiente, el radio de convergencia de R = ∞.

CONVERGENCIA EN LOS PUNTOS TERMINALES

Note que para una serie de potencias cuyo radio de convergencia es un número finito R, el teorema 9.20 no dice nada sobre la convergencia en los puntos ***terminales*** del intervalo de convergencia. Cada punto terminal debe analizarse separadamente respecto a convergencia o divergencia. Como resultado, el intervalo de convergencia de una serie de potencias puede tomar cualquiera de las seis formas mostradas en la figura 9.18.



Intervalos de convergencia
Figura 9.18

<u>EJEMPLO 5</u> Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Solución

Haciendo $u_n = x^n/n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{n+1}\right| \\
&= |x|.
\end{aligned}$$

Por tanto, por el criterio del cociente, el radio de convergencia es $R=1$. Y como la serie es centrada en 0, converge en el intervalo (-1.1). Sin embargo, este intervalo no es necesariamente el ***intervalo de convergencia.*** Para determinar el intervalo se debe analizar la convergencia en cada uno de sus puntos terminales. Cuando $x=1$, se obtiene la serie armónica ***divergente***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots. \qquad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

Cuando $x= -1$, se obtiene la serie armónica alternada o alternamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por tanto, el intervalo de convergencia para la serie es [-1.1], como se muestra en la figura 9-19.

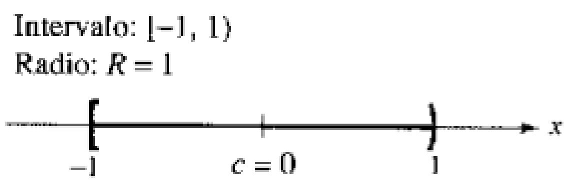


Figura 9.19

<u>EJEMPLO 6</u> Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}$.

Solución

Haciendo $u_n = (-1)^n(x+1)^n/2^n$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{2}\right|.$$

Por el criterio del cociente, la serie si $|(x+1)/2| < 1$ o $|x+1| < 2.$ Por tanto, el radio de convergencia es ***R=2.*** Como la serie esta centrada en *x= -1,* converge en el intervalo (-3,1). Además, en los puntos terminales se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \qquad \text{Diverge cuando } x = -3$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \qquad \text{Diverge cuando } x = 1.$$

ambos divergen. Por tanto, el intervalo de convergencia es (-3, 1), como se muestra en la figura 9.20.

<u>EJEMPLO 7</u> Hallar el intervalo de convergencia

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

Solución

Haciendo $u_n = x^n/n^2$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2x}{(n+1)^2}\right| = |x|.$$

Por tanto, el radio de convergencia es ***R=1***. Como la serie es centrada en ***x=0***, converge en el intervalo (-1,1). Cuando ***x=1***, se obtiene La serie *p* convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = 1$$

Cuando **x= -1**. Se obtiene la serie alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots. \qquad \text{Converge cuando } x = -1.$$

Por consiguiente, el intervalo de convergencia para la serie dada es [-1,1].

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

La representación de funciones mediante series de potencias ha jugado un papel importante en el desarrollo del cálculo. De hecho, mucho del trabajo de Newton con derivación e integración fue realizado en el contexto de las series de potencias especialmente su trabajo con funciones algebraicas complicadas y con funciones trascendentes. Euler, Lagrange, Leibniz y Bernoullis usaron ampliamente las series de potencias en cálculo

Una vez que se ha definido una función comuna serie de potencias, es natural preguntarse cómo se pueden determinar las características de la función. ¿Es continua? ¿Derivable? El teorema 9.21, el cual se establece sin la demostración, contesta estas preguntas.

Teorema 9.21 Propiedades de las funciones definidas mediante series de potencias

Si la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$
$$= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

tiene un radio de convergencia de $R > 0$, entonces, en el intervalo $(c-R, c+R)$, f es derivable (y por consiguiente continua). Además, la derivada y la primitiva o antiderivada de f son como sigue,

1. $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

2. $$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$$
$$= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \cdots$$

El ***radio de convergencia*** de la serie obtenida mediante la derivación o integración de una serie de potencias es el mismo que l de la serie de potencias original. Sin embargo, el ***intervalo de convergencia*** puede diferir como resultado del comportamiento en los puntos terminales.

El teorema 9.21 establece que, en muchos aspectos, una función definida mediante una serie de potencias se comporta como un polinomio. Es continua en su intervalo de convergencia, tanto su derivada como su antiderivada o primitiva pueden ser determinadas derivando e integrando cada termino de la serie de potencias dadas. Por ejemplo, la derivada de la serie de potencias

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + (2)\frac{x}{2} + (3)\frac{x^2}{3!} + (4)\frac{x^3}{4!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Nótese que $f'(x)=f(x)$. ¿Reconoce esta función?

Ejemplo 8 Intervalos de convergencia de f(x), f´(x) e ∫ f(x) dx

Considerar la función dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdot \cdot \cdot .$$

Calcular los intervalos de convergencia para cada una de las siguientes expresiones.

a) $\int f(x)$ **dx** **b) f(x)** **c) f´(x)**

Solución Por el teorema 9.21, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= C + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \cdot \cdot \cdot . \end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, se puede demostrar que cada serie tiene un radio de convergencia R = 1. Considerando el intervalo (-1, 1), se tiene lo siguiente.

a) Para $\int f(x)dx$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1].$$

converge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es [-1, 1].

b) Para $f(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } [-1, 1).$$

Converge para $x = -1$ y diverge para $x = 1$. Por tanto, su intervalo de convergencia es [-1, 1).

c) Para $f'(x)$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

Diverge para $x = \pm 1$, y su intervalo de convergencia es (-1,1).

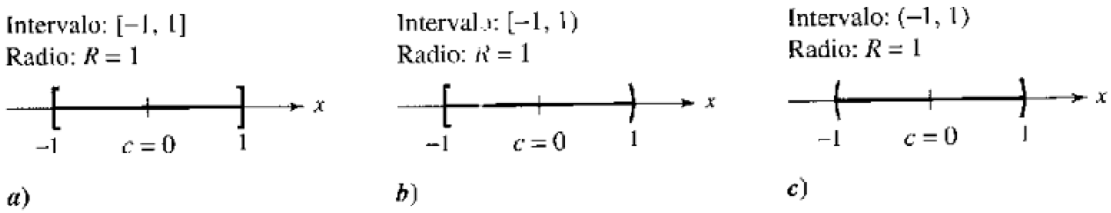


Figura 9.21

[redacted]

En el ejemplo 8 parece que, de las tres series, la de la derivada $f(x)$, es la que tiene menor posibilidad de converger en los puntos terminales. De hecho, puede mostrarse que si la serie de $f'(x)$ converge en los puntos terminales $x = c \pm R$, la serie de $f(x)$ también converge en ellos.

Sección 9.9 Representación de funciones en serie de potencias

Series geométricas de potencias

Considerar la función dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. La forma de f se parece mucho a la suma de una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.$$

En otros términos, si se toma $a = 1$ y $r = x$, una representación de 1 / (1-x), en forma de una serie de potencias centrada en 0, es

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

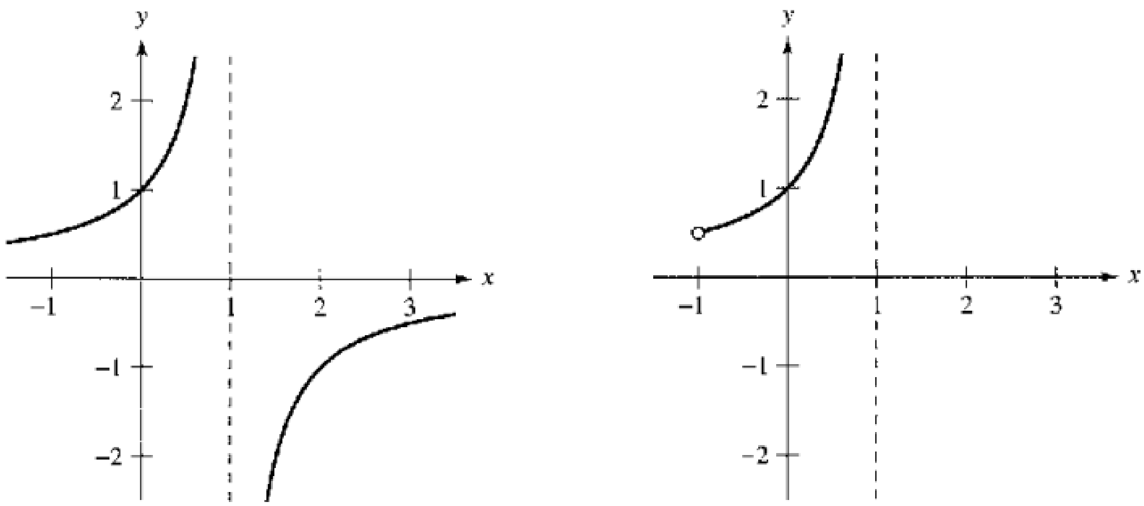
Naturalmente, esta serie representa $f(x) = 1/(1-x)$ sólo en el intervalo (-1,1), mientras que f está definida para todo $x \neq 1$, como se muestra en la figura 9.22. Para representar f en otro intervalo, se debe desarrollar otra serie diferente. Por ejemplo, para obtener la serie de potencias centrada en -1, se podría escribir

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1/2}{1-[(x+1)/2]} = \frac{a}{1-r}$$

Lo cual implica que $a = \frac{1}{2}$ y $r = (x+1)/2$. Así, para |x+1|<2, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(x+1)^3}{8} + \cdots\right], \quad |x+1| < 2 \end{aligned}$$

La cual converge en el intervalo (-3, 1)



$f(x) = \frac{1}{1-x}$, Dominio: todo $x \neq 1$ $\qquad$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, Dominio: $-1 < x < 1$

Figura 9.22

<u>Ejemplo 1</u> Hallar una serie geométrica de potencias centrada en 0.

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \frac{4}{x+2}$, centrada en 0.

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ se obtiene

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1-(-x/2)} = \frac{a}{1-r}$$

Lo cual implica que $a = 2$ y $r = -x/2$. Por tanto, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= 2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdot\cdot\cdot\right). \end{aligned}$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

Lo cual implica que el intervalo de convergencia es (-2,2)

Otra manera de determinar una serie de potencias para una función racional como la del ejemplo 1 es usar la división larga. Por ejemplo, dividiendo 2 + x en 4 se obtiene el siguiente resultado

División larga

$$\begin{array}{r l}
 & 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots \\
2 + x \,) & 4 \\
 & \underline{4 + 2x} \\
 & \quad -2x \\
 & \quad \underline{-2x - x^2} \\
 & \qquad\quad x^2 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 + \frac{1}{2}x^3} \\
 & \qquad\qquad -\frac{1}{2}x^3 \\
 & \qquad\qquad \underline{-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4}
\end{array}$$

<u>Ejemplo 2</u> Hallar una serie geométrica de potencias centrada en 1

Hallar una serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{x}$, centrada en 1

Solución Escribiendo $f(x)$ en la forma $a/(1-r)$ se obtiene

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(-x+1)} = \frac{a}{1-r}$$

Lo cual implica que $a = 1$ y $r = 1 - x = -(x-1)$. Por tanto, la serie de potencias para $f(x)$ es

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [-(x-1)]^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$
$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdot \cdot \cdot .$$

Esta serie de potencias converge cuando

$$|x-1| < 1$$

Lo cual implica que el intervalo de convergencia es (0,2).

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

La versatilidad de las series geométricas de potencias se mostrará más adelante en esta sección, después de una discusión acerca de las operaciones con series de potencias. Estas operaciones, usadas con la derivación y la integración, proporcionan un medio para desarrollar series de potencias para una gran variedad de funciones elementales. (Por simplicidad, las propiedades siguientes se enuncian para una serie centrada en 0).

Operaciones con series de potencias

Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$.

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$

2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$

3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

Las operaciones descritas pueden modificar el intervalo de convergencia de la serie resultante. Por ejemplo, en la suma siguiente, el intervalo de convergencia de la suma es la intersección de los intervalos de convergencia de las dos series originales.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{(-1,\,1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{\cap\ (-2,\,2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) x^n}_{=\ (-1,\,1)}$$

EJEMPLO 3: Suma de dos series de potencias

Hallar una serie de potencias, centrada en 0, para $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 1}$.

Solución:

Usando las fracciones parciales, se puede escribir $f(x)$ como $\dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.

Sumando las dos series geométricas de potencias.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

y

$$\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

Se obtiene la serie de potencias siguiente.

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]x^n = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 - \cdots$$

El intervalo de convergencia para esta serie de potencias es (-1, 1).

EJEMPLO 4: Hallar una serie de potencias mediante integración

Hallar una serie de potencias $f(x) = \ln x$, centrada en 1.

Solución:

Por el ejemplo 2, se sabe que: $\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$. Intervalo de convergencia: (0, 2).

Integrando esta serie se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln x &= \int \frac{1}{x}\,dx + C \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Haciendo $x = 1$, se concluye, $c = 0$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots. \end{aligned}$$

Intervalo de convergencia: (0, 2].

Note que la serie converge en $x = 2$. Esto es consistente con la observación hecha en la sección precedente de que la integración de una serie de potencias puede alterar la convergencia en los puntos terminales del intervalo de convergencia.

EJEMPLO 5: Hallar una serie de potencias mediante integración

Hallar una serie de potencias para $g(x) = \arctan x$, centrado en 0.

Solución:

Como $D_x[\arctan x] = 1/(1 + x^2)$, puede usarse la serie

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \qquad \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).$$

Sustituyendo x^2 para x se obtiene

$$f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Por último, integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + C \\
&= C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && \text{Sea } x = 0, \text{ entonces } C = 0. \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots. && \text{Intervalo de convergencia: } (-1, 1).
\end{aligned}$$

Puede mostrarse que la serie de potencias desarrollada para $\arctan x$ en el ejemplo 5 también converge $(a \arctan x)$ para $x = \pm 1$. Por ejemplo, cuando $x = 1$, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\arctan 1 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, esta serie (desarrollada por James Gregory en 1671) no proporciona una manera práctica de aproximar π debido a que converge tan lentamente que se necesitarían cientos de términos para obtener una precisión razonable. El ejemplo 6 muestra cómo usar *dos* series diferentes de arctangente para obtener una aproximación muy buena de π usando unos cuantos términos. Esta aproximación fue desarrollada por John Machin en 1706.

EJEMPLO 6: Aproximación a π mediante una serie

Usar la identidad trigonométrica

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

Solución:

Al usar sólo cinco términos de cada una de las series para el arcta y arctan (1/239), se obtiene

$$4\left(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}\right) \approx 3.1415926$$

Lo cual coincide con el valor exacto de π con un error menor que 0.0000001.

PROBLEMARIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{an(x-C)^n = a_0(x-c)^0 + a_2(x-L)^2 + \cdots}$$

¿Para qué valores x la serie conv?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{(x-3)^n}}{\boldsymbol{n}}$$

Solución

$$\boldsymbol{a_n = \frac{(x-3)^n}{n}}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(x-3)^n}\ \cdot\ (x-3)\ \cdot\ n}{(n+1)\cdot\cancel{(x-3)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot(x-3)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}+1}\cdot(x-3) = \lim_{n\to\infty}$$

$$= 1\cdot|x-3| = |x-3|$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| < 1$$

Así:

$$|x-3| < 1 <=> -1 < -3 < 1 <=> 2 < x < 4$$

Extremos:

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow convergente$$

$$x = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow divergente$$

$$\frac{R}{} = 4 \Rightarrow \sum \frac{(X-3)^4}{n} \rightarrow converge\ si\ X \in [2,4[$$

LISTA DE COTEJO PARA INVESTIGACION DOCUMENTAL

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno(a): Aguilera Xala Stuardo			
GRUPO:	207-A	CARRERA:	INGENIERIA GESTION EMPRESARIAL

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		NOMBRE DEL CURSO: CALCULO INTEGRAL
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO		FIRMA DEL DOCENTE
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO: IV SERIES	FECHA: 31 DE MAYO DEL 2024	PERIODO ESCOLAR:FEBRERO-JUNIO 2024
INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN		
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
2%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación	X		
2%	**b.** Introducción	X		
2%	**c.** Ortografía	X		
4%	**d.** Desarrollo coherente del tema	X		
4%	**e.** citar fuentes de información	X		
2%	**Enfoque:** buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
20%	**Elaboración**: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
4%	**Responsabilidad:** Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
40%	**CALIFICACIÓN**	40		

Stuardo Aguilera Xala 207-A

Examen Unidad IV

D 28 M 05 A 21

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 (x-c)^0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

Ejercicio:

¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ conv?

Solución $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$ Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x-3)^n} \cdot (x-3) \cdot n}{(n+1) \cdot \cancel{(x-3)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}+1} \cdot (x-3 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x-3|$$

$$= 1 \cdot |x-3| = |x-3|$$

Entonces: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

Así: $|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < -1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Extremos: $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Convergente

$x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Divergente

R/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \rightarrow$ Convergente si $x \in [2,4[$

Escaneado con CamScanner

Eduardo Aguilera Xala 207-A

28 05 24

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{4n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{n} - \sqrt{4n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{4n})}{(\sqrt{n} - \sqrt{4n})(\sqrt{n} + \sqrt{4n})}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{5n} \cdot \sqrt{4n}}{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{4n})^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n^2} + \sqrt{20n^2}}{n - 4n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{5n^2} + \sqrt{20n^2}}{-3n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{20}) \cdot n}{-3n} = -\frac{\sqrt{5} + \sqrt{20}}{3}$$

$$= -\sqrt{5}$$

En la última igualdad hemos simplificado el resultado.

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{20}}{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 \cdot 4}}{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot 2}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot (1 + 2)}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{3}$$

$$= \sqrt{5}$$

Escaneado con CamScanner