INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN ANDRÉS TUXTLA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

ÁLGEBRA LINEAL

ENSAYO

UNIDAD V

PROF. HUMBERTO VEGA MULATO

MELISSA TORNADO MARTÍNEZ – 231U0401

211-A

SAN ANDRÉS TUXTLA VERACRUZ

31 DE MAYO DE 2024

TRANSFORMACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una rama fundamental de las matemáticas que estudia conceptos como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Es una herramienta esencial en disciplinas como la física, la ingeniería y otras ciencias. Algunos de los temas clave que se abordan en el álgebra lineal incluyen matrices, vectores y ecuaciones lineales.

En el ámbito de la ingeniería, el álgebra lineal es esencial, ya que se relaciona con el estudio de vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y espacios vectoriales, lo que permite el desarrollo de un pensamiento lógico y algorítmico al resolver problemas. Además, con el uso de computadoras, el álgebra lineal ha cobrado mayor importancia, ya que se requiere para un gran número de operaciones, especialmente en el manejo de imágenes, sonido y digitalización de información

Tiene muchos ámbitos en los cuales es muy importante hacer uso del álgebra lineal, es muy relevante tener noción de estos conceptos fundamentales, es por ello que, en este trabajo, se dará una exposición más detallada de las transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales son un concepto fundamental en el ámbito de las matemáticas, particularmente en el estudio del álgebra lineal. Estas transformaciones son funciones entre espacios vectoriales que preservan la estructura lineal, lo que significa que conservan la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Exploraremos más a detalle la introducción a las transformaciones lineales, el núcleo o imagen de una transformación lineal, la matriz de una transformación lineal, y diversas aplicaciones de las transformaciones lineales en diversos ámbitos de las disciplinas.

DESARROLLO

Las **transformaciones lineales** son un concepto fundamental en el álgebra lineal y tienen una amplia gama de aplicaciones en matemáticas, física e ingeniería. Una transformación lineal, TL, es una función cuyo dominio e imagen son espacios vectoriales y que cumple ciertas condiciones específicas. Estas transformaciones se representan en términos de matrices y viceversa, lo que las hace especialmente útiles en el análisis y la manipulación de datos y sistemas de ecuaciones lineales.

Pueden tener una variedad de efectos, y comprender su naturaleza es crucial para entender y resolver problemas en diversas áreas. Por ejemplo, al observar objetos desde diferentes perspectivas, las transformaciones lineales nos permiten apreciar características que podrían pasar desapercibidas de otra manera.

Son herramientas poderosas que permiten comprender y manipular sistemas vectoriales y resolver una amplia gama de problemas en diferentes disciplinas. Su comprensión es fundamental para cualquier persona que trabaje con matemáticas, física, ingeniería u otras áreas relacionadas.

Tienen propiedades distintivas, como el núcleo, la nulidad, la imagen y el rango. Además, cualquier transformación lineal puede estar representada como una matriz de transformación. Estas representaciones matriciales son fundamentales para comprender la interacción entre espacios vectoriales y para realizar operaciones con transformaciones lineales.

En el contexto de una transformación lineal, **el núcleo y la imagen** son conceptos fundamentales que nos ayudan a comprender la estructura y el comportamiento de dicha transformación.

El núcleo de una transformación lineal se refiere al conjunto de vectores del dominio cuya imagen por (F) es el vector nulo ({0_W}). Matemáticamente, se denota como (Nu(F)) y se define como el conjunto de vectores (v) en (V) tales que (F(v) = {0_W}). El núcleo de una transformación lineal es, en sí mismo, un subespacio de (V). Además, el núcleo puede tener una base, que es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan el núcleo. En cambio, la imagen de una transformación lineal se refiere al conjunto de vectores en el codominio que son el resultado de aplicar la transformación a algún vector en el dominio. En otras palabras, la imagen de (F) es el conjunto de todos los vectores (w) en (W) que pueden ser escritos como (F(v)) para algún (v) en (V). La imagen de una transformación lineal es un subespacio del codominio.

Pasando a otro concepto relevante hablaremos de la **matriz de una transformación lineal** que como fue expuesto antes son fundamentales para realizar operaciones con transformaciones lineales. Una matriz asociada a una transformación lineal es una representación de la transformación lineal en forma matricial. Esta matriz permite realizar operaciones lineales mediante matrices que modifican la dimensión inicial de un vector dado. En otras palabras, se puede modificar la dimensión de un vector multiplicándolo por una matriz cualquiera. Las transformaciones lineales son la base de los vectores y valores propios de una matriz, ya que dependen linealmente unos de otros.

Teniendo ya noción de conceptos importantes como la definición de las transformaciones lineales, núcleo o imagen, la matriz de una transformación, proseguiremos a exponer las **aplicaciones que tienen las transformaciones lineales**, como la reflexión, dilatación, contracción y rotación, estas son fundamentales en el álgebra lineal y tienen diversas aplicaciones en áreas como la física, la informática y la ingeniería. Estas transformaciones se aplican a espacios vectoriales y tienen propiedades específicas que las hacen útiles en diferentes contextos.

La reflexión es una transformación que produce una imagen especular de un objeto respecto a un eje. En el caso de la reflexión sobre el eje x, cada vector se refleja sobre dicho eje para obtener un nuevo vector. Tienen aplicaciones en gráficos por computadora para animar objetos, en física para describir sistemas de partículas y en muchas otras áreas.

La dilatación es una transformación que incrementa distancias. En el caso de la dilatación, se produce un crecimiento en la recta, generalmente en el eje y, sin aumentar en el eje x. Es decir se produce un aumento en el tamaño de un objeto sin cambiar su forma. Generalmente, el valor de **y** se cambia para que la recta crezca en el eje **y** sin aumentar en el eje **x**. Por ejemplo, una dilatación es una transformación que incrementa distancias, y puede ser representada por una matriz.

La contracción es un caso especial de dilatación donde el factor de escala es menor que 1. Esto reduce el tamaño de un objeto sin cambiar su forma. Tiene aplicaciones prácticas en diversas áreas, como el procesamiento de imágenes, la optimización de algoritmos y la representación de datos en espacios de menor dimensión. Comprender estas aplicaciones es crucial para el desarrollo de soluciones eficientes en campos como la inteligencia artificial, la visualización de datos y la simulación de fenómenos físicos.

La rotación es una transformación que cambia la orientación de un objeto. En dos dimensiones, la rotación en sentido antihorario por un ángulo θ se puede representar por una matriz específica.

Estas transformaciones lineales tienen aplicaciones prácticas en la vida diaria, ya que conservan la forma y las medidas de las figuras u objetos, como las simetrías y las rotaciones. Se utilizan para realizar reflexiones, dilataciones, contracciones y rotaciones de puntos en el plano. En geometría, son fundamentales para configurar las transformaciones de objetos.

CONCLUSIÓN

En pocas palabras como fue visto en este documento queda más que claro que las transformaciones lineales son herramientas poderosas que permiten comprender y manipular sistemas vectoriales y resolver una variedad de problemas en una variedad de disciplinas. Cualquiera que trabaje en matemáticas, física, ingeniería u otras áreas relacionadas debe comprenderlo. Para poder resolver cualquier ejercicio o problema que tenga que ver con las transformaciones lineales, ya que como fue expuesto, en todas las ingenierías son fundamentales.

Los conceptos fundamentales del núcleo y la imagen de una transformación lineal nos permiten comprender su estructura y comportamiento, proporcionando información importante sobre cómo los vectores del dominio se transforman en vectores del codominio.

La matriz de una transformación lineal es una herramienta fundamental para realizar operaciones lineales mediante matrices que cambian la dimensión inicial de un vector dado, y es fundamental para comprender muchas otras ideas del álgebra lineal.

Las aplicaciones de las transformaciones lineales son fundamentales en la comprensión y análisis de fenómenos matemáticos, físicos y computacionales, lo que las convierte en un concepto crucial en una amplia gama de disciplinas, tienen múltiples usos. En la ingeniería en Mecatrónica los números son la base de la carrera es por ello que conocer sobre estos temas es de vital importancia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- “Transformaciones Lineales: Definición + Propiedades [Guía completa]”. Álgebra y Geometría Analítica. Accedido el 29 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://aga.frba.utn.edu.ar/definicion-y-propiedades-de-las-transformaciones-lineales/.
- Colaboradores de los proyectos Wikimedia. “Aplicación lineal - Wikipedia, la enciclopedia libre”. Wikipedia, la enciclopedia libre. Accedido el 31 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://es.wikipedia.org/wiki/Aplicación_lineal
- Accedido el 27 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://hopelchen.tecnm.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r117191.PDF.
- “Clase digital 6. Transformaciones lineales - Recursos Educativos Abiertos”. Recursos Educativos Abiertos. Accedido el 28 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://blogs.ugto.mx/rea/clase-digital-6-transformaciones-lineales/.
- “Transformación lineal de matrices”. Economipedia. Accedido el 28 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://economipedia.com/definiciones/transformacion-lineal-de-matrices.html.
- “5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación.” ALGEBRA LINEAL. Accedido el 30 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://ariatnisegundoalgebralineal.blogspot.com/p/54-aplicacion-de-las-transformaciones.html.
- T. A. Lineal. “5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación.” U5 Transformaciones Lineales. Accedido el 30 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://transformacioneslinealeslts.blogspot.com/2021/01/aplicaciones-de-transformaciones.html.
- Contributors to EstudiaConNosotros! Wiki. “Aplicación de las Transformaciones Lineales: Reflexión, Dilatación, Contracción y Rotación”.

EstudiaConNosotros! Wiki. Accedido el 31 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://estudiaconnosotros.fandom.com/wiki/Aplicación_de_las_Transformaciones_Lineales:_Reflexión,_Dilatación,_Contracción_y_Rotación.

- “5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación.” Álgebra Lineal. Accedido el 31 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://itsavbasicas.blogspot.com/2012/05/54-aplicacion-de-las-transformaciones.html.
- “Dónde se aplican las transformaciones lineales ? - Issuu”. Issuu. Accedido el 31 de mayo de 2024. [En línea]. Disponible: https://issuu.com/bismelis_m/docs/educando_magazine__algebra_lineal_/s/12295415.

LISTA DE COTEJO ENSAYO

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno(a):TORNADO MARTINEZ MELISSA			
GRUPO:	211-A	CARRERA:	INGENIERIA MECATRONICA

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		NOMBRE DEL CURSO:ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO		FIRMA DEL DOCENTE
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO:TRANSFORMACIONES LINEALES	FECHA: 31 DE MAYO DEL 2024	PERIODO ESCOLAR:FEBRERO-JUNIO 2024
INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN		
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
1%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación	X		
1%	**b.** Introducción	X		
1%	**c.** Ortografía	X		
2%	**d.** Desarrollo coherente del tema	X		
2%	**e.** citar fuentes de información	X		
1%	**Enfoque:** buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
10%	**Elaboración**: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
2%	**Responsabilidad:** Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
20%	CALIFICACIÓN	40		

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN ANDRÉS TUXTLA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

ÁLGEBRA LINEAL

PROBLEMARIO

UNIDAD V

PROF. HUMBERTO VEGA MULATO

MELISSA TORNADO MARTÍNEZ – 231U0401

211-A

SAN ANDRÉS TUXTLA VERACRUZ

31 DE MAYO DE 2024

PROBLEMARIO V

Resolver los problemas propuestos de transformaciones lineales

Ejercicio 1

Sea $F: R^2 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada es:

$$M(F)_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $E = \{(1,0), (0,1)\}$ y $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

Hallar todos los $v \in R^2$ cuya imagen es $w = (3,2,1)$

Resolución

Debemos usar sus coordenadas en base $B = [W]_B$.

Calculamos esas coordenadas:

$$(3,2,1) = \alpha(1,1,1) + B(1,1,0) + y(1,0,0) = \begin{cases} 3 = a + B + y \\ 2 = a + B \\ 1 = y \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ B = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$[W]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos un vector $v = (a,b)$ tal que $T(v) = W$. Las coordenadas de v en base canónica son $[V]_E = \binom{a}{b}$ pues; $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$.

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \\ b = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} = [v]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = 1(1,0) + 1(0,1) = (1,1)$$

Ejercicio 2

Demuestre que la transformación $T: R^2 \to R^2$ definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$ es lineal.

Solución

Sean $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Entonces

$$T(u+v) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 3y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 3y_2 \\ x_2 + 2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T(u) + T(v)$$

Por otro lado, para todo escalar c,

$$T(cu) = T\begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cx_1 + 3cy_1 \\ cx_1 + 2cy_1 \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} x_1 + 3y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix}$$

$$= cT\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= cT(u).$$

Como se cumplen las dos condiciones:

$$T(U+V) = T(U) + T(V)$$
$$T(cU) = cT(U)$$

T es lineal

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: **HUMBERTO VEGA MULATO**			ASIGNATURA: ALGEBRA LINEAL
		DATOS GENER ALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN	
		NOMBRE DEL ALUMNO: TORNADO MARTINEZ MELISSA	**UNIDAD: CINCO**
PERIODO: ENERO-JUNIO 2024	**GRUPO:211-A**		**FECHA DE ENTREGA:31 DE MAYO 2024**
		INSTRUCCIONES	
		Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.	

VALOR DEL REACTIVO		**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
			SI	**NO**	
4%		**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	X		
4%		**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
20%		**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
8%		**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
4%		**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
40%		**CALIFICACIÓN**	40		

GUIA DE OBSERVACIÓN PARA EXPOSICION

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA	NOMBRE DEL CURSO: ALGEBRA LINEAL
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO	TEMA: TRANSFORMACIONES LINEALES
OBJETIVO DE LA PRÁCTICA:	

DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO: TORNADO MARTINEZ MELISSA	NO. DE CONTROL:	FIRMA DEL ALUMNO:

INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN

Revisar los documentos o actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados “SI” cuando la evidencia a evaluar se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” ocúpela cuando tenga que hacer comentarios referentes a lo observado.

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5%	Dominio del tema (divagaciones, claridad y uso de ejemplos)	X		
5%	Orden y claridad en la exposición	X		
5%	Dominio del auditorio	X		
5%	Material utilizado	X		
5%	Dicción	X		
5%	Manejo del tiempo	X		
10%	Presentación: limpieza y formalidad	X		
40%	**CALIFICACIÓN**	40%		