INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

EVALUACIÓN ESCRITA DE LA UNIDAD I

NOMBRE DEL DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO	ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL

DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Martinez Solis Alejandro		CARRERA: ING. MECATRONICA
GRUPO: 211 A	FECHA: 06/Marzo/2024	PERIODO ESCOLAR: FEBRERO-JUNIO 2024

INSTRUCCIONES

Lea cuidadosamente y conteste correctamente lo que se te solicita. El tiempo para responder es de 50 minutos. Si tiene alguna duda sobre lo que se te solicita pregunta al docente. Se puede utilizar calculadora y formulario.

Resolver las siguientes integrales definidas.

a)

PORCENTAJE OBTENIDO 50%

$$\int_{2}^{5} \frac{7}{2}x^{-3}\,dx = 0.3675\ u^2$$

b)

$$\int_{\frac{5}{3}}^{3} \frac{8}{3x^{\frac{-5}{2}}}\,dx = 32.076\ u^2$$

c)

$$\int_{5}^{7} \frac{\left(-4\sqrt{x^{3}}\right)}{7}\,dx = -16.854\ u^2$$

d)

$$\int_{4}^{7} \left(-2\sqrt[4]{x^{5}}\right)dx = -50.733\ u^2$$

e)

$$\int_{6}^{10} \frac{4\,dx}{\sqrt[5]{x^{2}}} = 7.006\,u^2$$

1.- $\int_2^5 \frac{7}{2}x^{-3}\,dx = -\frac{7}{4x^2}\Big|_2^5 = \left[-\frac{7}{4(5)^2}\right]-\left[-\frac{7}{4(2)^2}\right] = \left[-\frac{7}{4(25)}\right]-\left[-\frac{7}{4(4)}\right] = -\frac{7}{100}+\frac{7}{16} = \frac{-28+175}{400} = \frac{147}{400}$ $R = \frac{147}{100}u^2 = 0.3675u^2$

$\int \frac{7}{2}x^{-3}\,dx = \frac{7}{2}\int x^{-3}\,dx = \frac{7}{2}\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]+C = \frac{7}{2}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]+C = \frac{7}{2}\left[\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C = -\frac{7}{4}x^{-2}+C = -\frac{7}{4x^2}+C$

2.- $\int_{\frac{5}{3}}^{3} \frac{8}{3x^{-5/2}}\,dx = \frac{16\sqrt{x^7}}{21}\Big|_{\frac{5}{3}}^{3} = \left[\frac{16\sqrt{(3)^7}}{21}\right]-\left[\frac{16\sqrt{(\frac{5}{3})^7}}{21}\right] = \left[\frac{16\sqrt{2187}}{21}\right]-\left[\frac{16\sqrt{35.772}}{21}\right] = \frac{16(46.765)}{21}-\frac{16(5.976)}{21} = \frac{748.245}{21}-\frac{95.629}{21}$

$= 35.63 - 4.553 = 31.076$ $R = 31.076\ u^2$

$\int \frac{8}{3x^{-5/2}}\,dx = \int \frac{8}{3}x^{+5/2}\,dx = \frac{8}{3}\int x^{+5/2}\,dx = \frac{8}{3}\int x^{+5/2}\,dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^{+5/2+2/2}}{+\frac{5}{2}+\frac{2}{2}}\right]+C = \frac{8}{3}\left[\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}}\right]+C = \frac{8}{3}\left[\frac{\frac{1}{1}}{\frac{7}{2}}x^{7/2}\right]+C = \frac{8}{3}\left[\frac{2}{7}x^{7/2}\right]+C = \frac{16x^{7/2}}{21}+C = \frac{16\sqrt{x^7}}{21}+C$

3.- $\int_5^7 \frac{-4\sqrt{x^3}}{7}\,dx = \frac{-8\sqrt{x^5}}{35}\Big|_5^7 = \left[\frac{-8\sqrt{7^5}}{35}\right]-\left[\frac{-8\sqrt{5^5}}{35}\right] = \left[\frac{-8\sqrt{16,807}}{35}\right]+\left[\frac{8\sqrt{3,125}}{35}\right] = \left[\frac{-8(129.641)}{35}\right]+\left[\frac{8(55.901)}{35}\right] = -\frac{1,037.131}{35}+\frac{447.213}{35}$

$= -29.632 + 12.777 = -16.851$ $R = -16.854\ u^2$

$\int \frac{-4\sqrt{x^3}}{7}\,dx = \int \frac{-4}{7}x^{3/2}\,dx = \frac{-4}{7}\int x^{3/2}\,dx = \frac{-4}{7}\left[\frac{x^{3/2+2/2}}{3/2+2/2}\right]+C = \frac{-4}{7}\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]+C = \frac{-4}{7}\left[\frac{\frac{1}{1}}{\frac{5}{2}}x^{5/2}\right]+C = \frac{-4}{7}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]+C = -\frac{8\sqrt{x^5}}{35}+C = -\frac{8\sqrt{x^5}}{35}+C$

4.- $\int_4^7 -2\sqrt[4]{x^5}\,dx = -\frac{8\sqrt[4]{x^9}}{9}\Big|_4^7 = \left[-\frac{8\sqrt[4]{(7)^9}}{9}\right]-\left[-\frac{8\sqrt[4]{(4)^9}}{9}\right] = \left[-\frac{8\sqrt[4]{40,353,607}}{9}\right]+\left[\frac{8\sqrt[4]{262,144}}{9}\right] = -\frac{637.618}{9}+\frac{181.019}{9} = 70.846+20.113$

$\int -2\sqrt[4]{x^5}\,dx = -2\int x^{5/4}\,dx = -2\left[\frac{x^{5/4+4/4}}{5/4+4/4}\right]+C = \frac{-2}{1}\left[\frac{x^{9/4}}{9/4}\right]+C = \frac{-2}{1}\left[\frac{4}{9}x^{9/4}\right]+C = -\frac{8\sqrt[4]{x^9}}{9}+C$ $R = -50.733\ u^2$

5.- $\int_6^{10} \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \frac{20\sqrt[5]{x^3}}{3}\Big|_6^{10} = \left[\frac{20\sqrt[5]{10^3}}{3}\right]-\left[\frac{20\sqrt[5]{6^3}}{3}\right] = \left[\frac{20\sqrt[5]{1000}}{3}\right]-\left[\frac{20\sqrt[5]{216}}{3}\right] = \frac{20(3.981)}{3}-\frac{20(2.930)}{3} = \frac{79.621}{3}-\frac{58.603}{3}$

$= 26.540 - 19.534 = 7.006$ $R = 7.006\ u^2$

$\int \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \int \frac{4}{x^{2/5}}\,dx = 4\int x^{-2/5}\,dx = 4\left[\frac{x^{-\frac{2}{5}+\frac{5}{5}}}{-\frac{2}{5}+\frac{5}{5}}\right]+C = 4\left[\frac{x^{3/5}}{\frac{3}{5}}\right]+C = 4\left[\frac{5}{3}x^{3/5}\right]+C = \frac{20}{3}x^{3/5}+C = \frac{20\sqrt[5]{x^3}}{3}+C$

LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO: MARTINEZ SOLIS ALESSANDRO	UNIDAD: I	
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2024	GRUPO: 211 A	FECHA DE ENTREGA: 23/02/2024
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
3%	**PRESENTACIÓN:** la investigación cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación **b.** letra legible **c.** Limpieza y orden **d.** Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía)	√		
2%	Maneja el lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia y secuencia entre párrafos	√		
2%	**INTRODUCCIÓN**: Da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las referencias bibliográficas que se utilizaron para su redacción.	√		
8%	**CONTENIDO**: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo, es digerible a todo público y presenta una metodología **COHERENCIA Y COHESIÓN:** Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo y es digerible a todo público coherente.	√		
3%	**Conclusiones**: Las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.	√		
2%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha señalada.	√		
20%	CALIFICACIÓN	20%		

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL	
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN			
NOMBRE DEL ALUMNO (A): MARTINEZ SOLIS ALESSANDRO			Problemario de la Unidad: 1
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2024	GRUPO: 211 A	FECHA DE ENTREGA: 04/03/2024	
INSTRUCCIONES			
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.			

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5 %	**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	√		
5 %	**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno	√		
10 %	**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.	√		
5 %	**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades	√		
5 %	**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	√		
30 %	**CALIFICACIÓN**	30%		

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN ANDRÉS TUXTLA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

CALCULO INTEGRAL

INVESTIGACION

UNIDAD I

PROF. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO

ALESSANDRO MARTINEZ SOLIS -231U0383

GIOVANNI DE JESÚS HIDALGO BRAVO – 231U0377

KAROL GUADALUPE RODRIGUEZ CORTÉS – 231U0396

JOSHUA DOMINGUEZ CRUZ – 231U0369

LUIS FABIO LUCHO PAXTIAN – 231U0379

111-A

SAN ANDRÉS TUXTLA VERACRUZ

19 DE DICIEMBRE 2023

INTRODUCCION

El cálculo integral es una parte fundamental del análisis matemático que se centra en el estudio de las áreas bajo curvas y la acumulación de cantidades variables. El cálculo Integral, que constituye una herramienta útil y práctica para abordar situaciones y problemas que tienen que ver con la variación y la acumulación de cantidades variables, además de formar parte importante de la estructura de la Matemática como disciplina científica para comprender y resolver problemas relacionados con áreas, volúmenes, velocidades, acumulaciones y más.

1.1 Mediciones aproximadas de figuras amorfas

Definición:

Las figuras amorfas, "son aquellas figuras que no tienen forma conocida (no es un cuadrado, ni triángulo, ni nada de ese estilo), más bien es una curva o una figura de muchos lados distintos y "deforme" y su principal finalidad es encontrar en una gráfica dada su área de la parte de adentro de la figura donde se encuentra el punto dado de la figura amorfa.

La medición aproximada de figuras amorfas se refiere a una serie de métodos utilizados para determinar el área o el perímetro de figuras geométricas que no son triángulos, cuadrados o círculos. Estos métodos son especialmente útiles cuando se trata de figuras irregulares o sin una forma regular. Permíteme explicarte algunos de estos métodos:

1.Reticulado:

•Consiste en hacer un reticulado de alguna forma regular (como rectángulos, cuadrados o trapecios) que cubra aproximadamente la superficie de la figura amorfa.

•La precisión de la aproximación del área obtenida por este método aumenta con la finura o densidad del reticulado.

2.Área bajo una curva:

•A menudo, necesitamos calcular aproximadamente el área bajo una curva entre dos valores límites.

•En lugar de un reticulado cuadrado, podemos trazar franjas rectangulares que cubran en forma aproximada el área bajo la curva.

•La suma de todas estas franjas rectangulares recibe el nombre de suma de Riemann.

La notación sumatoria es encontrar el valor de la ecuación dada respecto a un número determinado cuando un punto "n" tiende a cualquier número dado. Existen dos tipos de notación sumatoria:

•La notación sumatoria abierta

•La notación sumatoria pertinente

Cuando se estudia geometría es posible pensar que cada una de las figuras posee una forma definida, es decir, que posee lados, ángulos e incluso perímetros demarcados, de modo que el objeto se puede identificar con facilidad como el cuadrado, el círculo, el triángulo y demás. Sin embargo, no todas las figuras poseen estas características, puesto que hay algunas que poseen un aspecto extraño, disociado y con medidas variables, estas son las denominadas figuras amorfas.

Una figura amorfa es una figura o cuerpo que no tiene una forma regular o bien definida, en ese sentido, el término amorfo proviene del griego 'ámorphos', el cual significa 'sin forma'. De esta manera, es posible que una figura amorfa sea el resultado de la deformación o la fusión de otras figuras geométricas, aunque también puede ser una representación de un objeto natural que no sigue un patrón simétrico o repetitivo.

Las figuras amorfas poseen características muy diferentes a las de una figura geométrica, pues estas no poseen muchos de los elementos distintivos de la geometría debido a que, en sí, estos cuerpos no cuentan con una forma definida.

•No tienen vértices, aristas ni caras, como si ocurre en los casos de los polígonos o los poliedros.

•Las figuras amorfas no cuentan con ejes de simetría, ni puntos ni planos de simetría, como las figuras regulares.

•No es posible identificar un centro ni un radio definidos, como las figuras circulares.

•No tienen un perímetro ni un área exactos, sino que se pueden aproximar mediante métodos numéricos o geométricos.

•Tampoco cuentan con un volumen ni una superficie exactos, sino que se pueden aproximar mediante métodos numéricos o geométricos.

¿Cómo se lleva a cabo el cálculo aproximado del área de una figura amorfa?

Si se quiere hacer el cálculo aproximado del área de una figura amorfa, es posible llevar a cabo tres diferentes métodos, cada uno de ellos usan elementos matemáticos, además se apoyan en otros cuerpos geométricos.

El método del reticulado, el cual, consiste en dividir la figura en un conjunto de cuadrados o rectángulos iguales o distintos y sumar el área de cada uno de ellos.

Cuanto más pequeños sean los cuadrados o rectángulos, más precisa será la aproximación.

El método del trapecio, en el que se requiere dividir la figura en un conjunto de trapecios iguales o distintos y sumar el área de cada uno de ellos. Este método se suele aplicar cuando la figura está limitada por una curva y dos rectas paralelas.

El método del agotamiento se trata de un proceso en el que se busca inscribir o circunscribir la figura en un conjunto de polígonos regulares cada vez más grandes o pequeños y calcular el área de cada uno de ellos. Se reserva para momentos en los que se trabaja con una figura que tiene forma circular o elíptica.

Fórmula para calcular el área de una figura amorfa

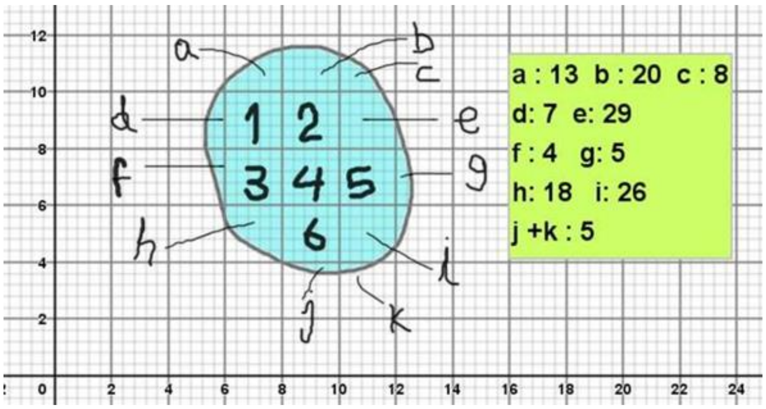
No existe una fórmula única para calcular el área de una figura amorfa, como en el caso de las geométricas, donde área es igual a base por altura. Por el contrario, en este caso se debe elegir el método más adecuado según la forma y las características del cuerpo con el que se trabaja. Sin embargo, se puede expresar el área aproximada de una figura amorfa como la suma de las áreas de las figuras que la componen.

Lo cual se representa con los símbolos: $A \approx \sum_{i=1}^{n} a_i$ Donde A es el área aproximada de la figura amorfa, la 'n' es el número de figuras que la forman y ai es el área de cada una de ellas. Esto aplica para cada uno de los tres procesos en donde se busca medir el área o el perímetro de una figura amorfa. De modo que al inicio de la operación debes verificar el cuerpo de la figura y escoger entre el método del reticulado, el método del trapecio o el método del agotamiento. Estos procesos consisten en dividir la figura en un conjunto de figuras más simples cuyo área o perímetro se conoce o se puede calcular con otros datos.

Luego, se suma el área o el perímetro de cada una de ellas, es importante destacar que cuanto más pequeñas sean las figuras que forman el conjunto, más precisa será la aproximación. En sí, los métodos dicen lo mismo, lo que cambia es el conjunto de formas que se crean en el interior de la figura amorfa.

Ejemplo

La figura 2 muestra una figura amorfa, cuyo contorno es semejante a las piedras de la imagen 1. Para calcular su área se la coloca sobre un reticulado con cuadrados principales de 2 x 2 unidades al cuadrado (por ejemplo, pueden ser de 2 cm²).



Y como cada cuadrado está subdividido en 5 x 5 subdivisiones, entonces cada subdivisión tiene un área de 0,4 x 0,4 unidades al cuadrado (0,16 cm²).

El área de la figura se calcularía así:

Puede servirte: Estadística inferencial: historia, características, para qué sirve, ejemplos

Área = 6 x 2 cm² + (13 + 20 + 8 + 7 + 29 + 4 + 5 + 18 + 26 + 5) x 0,16 cm²

Es decir:

Área = 12 cm² + 135 x 0,16 cm² = 33,6 cm².

Ejercicio resuelto

Calcular aproximadamente el área bajo la curva dada por la función f(x) = x2 entre a = -2 hasta b = +2. Para ello escribir primero la suma para n particiones regulares del intervalo [a, b] y luego tomar el límite matemático para el caso que el número de particiones tienda a infinito.

Solución:

En primer lugar, se define el intervalo de las particiones como

$\Delta x = (b – a)/n$.

Luego la suma por la derecha correspondiente a la función f(x) queda así:

$S(f,n)=\sum_{i=1}^{n}f(a+i\Delta x)\Delta x$ Se sustituye a=-2 y b=+2 de modo que el intervalo o paso sea Δx = 4/n. En tal caso la sumatoria para la función f(x) = x2 es:

$S(f,n)=\sum_{i=1}^{n}\left [-2 +i\left (\frac{4}{n} \right) \right]^{2}\left (\frac{4}{n} \right)$ Se desarrolla el binomio cuadrado:

[-2 +(4i/n)]2 = 4 – 16 i /n + (4/n)2 i2

Y luego se sustituye en la sumatoria:

$S(f,n)=\sum_{i=1}^{n}\left [\frac{16}{n} -\frac{64i}{n^{2}}+\frac{64i^{2}}{n^{3}} \right]$ Separando las sumatorias y sacando las cantidades constantes como factor común de cada suma se obtiene:

$S(f,n)=\frac{16}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{64}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}i +\frac{64}{n^{3}}\sum_{i=1}^{n}i^{2}$ La primera de las sumatoria da n, la segunda es:

$\sum_{i=1}^{n}i = n(n+1)/2$

Y la tercera resulta:

$\sum_{i=1}^{n}i^{2} = n(n+1)(2n+1))/6$ Sustituyendo en la expresión de la sumatoria se tiene:

S(f, n) = 16 – 64(n+1)/2n + 64(n+1)(2n+1)/6n2

Al escoger un valor grande para n se tiene una buena aproximación al área bajo la curva. Sin embargo, en este caso es posible conseguir el valor exacto tomando el límite matemático cuando n tienda a infinito:

Área = limn->∞[16 – 64(n+1)/2n + 64(n+1)(2n+1)/6n2]

Área = 16 – (64/2)+ (64/3) = 16/3 = 5,333.

1.2 Integral definida

La integral definida es una operación matemática que surge del cálculo, una rama de las matemáticas. En términos simples, la integral definida de una función en un intervalo específico se puede interpretar como el área bajo la curva de la función en ese intervalo.

La notación para la integral definida de una función

f(x)

en un intervalo

[a,b]

es

$\int_a^b f(x)\, dx.$

Aquí,

f(x)

es la función que deseas integrar, y

a

y

b

son los límites inferior y superior de la integral, respectivamente.

Las **sumas de Riemann** son una forma de aproximar el valor de una integral definida. Imagina que divides el área bajo la curva en un número de rectángulos delgados. Si sumas el área de estos rectángulos, obtienes una aproximación del área total bajo la curva. A medida que el número de rectángulos se acerca al infinito, la suma de Riemann se acerca al valor exacto de la integral definida.

La integral definida tiene varias propiedades útiles:

- **Linealidad**: La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones individuales. Es decir,

$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

- **Integral de una constante**: La integral de una constante

k

sobre un intervalo

[a,b]

es igual a la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Es decir,

$\int_a^b kdx = k(b-a)$.

- **Integral del inverso de una función**: Si

f(x)>0

en el intervalo

[a,b]

, entonces

$\int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx = \ln \mid f(b) \mid - \ln \mid f(a) \mid$.

El **teorema fundamental del cálculo** establece una conexión profunda entre la integral definida y la antiderivada de una función. Si

F(x)

es una antiderivada de

f(x)

(es decir,

F′(x)=f(x)

), entonces

$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Este teorema es la base para muchas técnicas de integración.

La integral definida tiene numerosas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y la física, incluyendo el cálculo de áreas y volúmenes, el cálculo de trabajo realizado por una fuerza, el cálculo de masa, centro de masa e inercia, y el cálculo de probabilidades en estadística.

Existen varios métodos para evaluar integrales definidas, incluyendo la integración directa, la integración por partes, la sustitución trigonométrica o algebraica, la descomposición en fracciones parciales (en el caso de funciones racionales), y el uso de tablas de integrales.

Finalmente, es importante mencionar que la integral definida también puede calcularse en intervalos infinitos o semi-infinitos. Esto se conoce como una integral impropia y requiere técnicas especiales para su evaluación.

Dominar la integral definida es crucial para diversas áreas de las matemáticas y la física, ya que te permite modelar y resolver problemas del mundo real mediante la interpretación geométrica y analítica del área bajo las curvas. Espero que esta explicación te ayude a entender mejor la integral definida. Si tienes más preguntas, no dudes en preguntar.

Ejemplo

Calcula la integral definida:

$$\int_1^2 x^3 \cdot dx$$

y representa geométricamente el resultado.

Calculamos la integral:

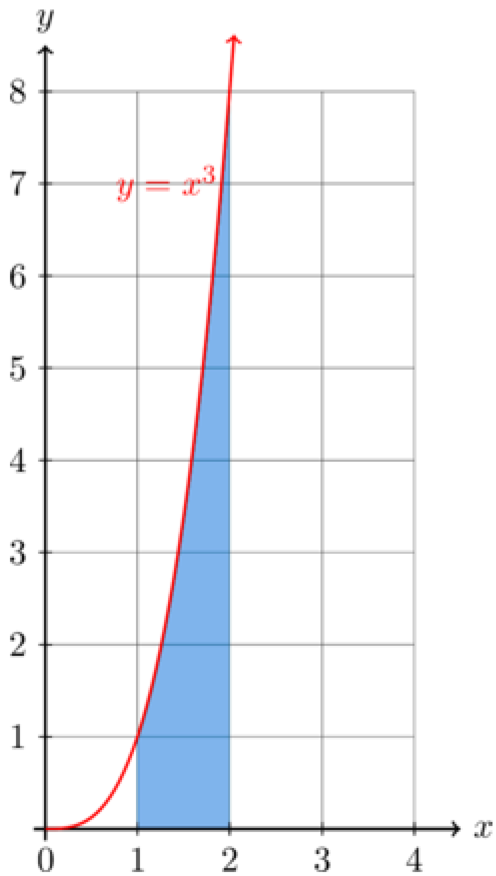
$$\int_1^2 x^3 \cdot dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2$$

Ahora evaluamos:

$$\int_{1}^{2} x^3 \cdot dx = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$

Este resultado representa el área bajo la curva $y = x^3$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ y sobre el eje x. El cálculo de esta integral definida también se puede realizar utilizando la definición:

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$



La integral definida está definida como un límite. Este límite puede calcularse con las fórmulas de integración inmediata. Para calcular el valor de la integral definida evaluamos primero el límite superior y después el límite inferior. La diferencia entre estos valores es el valor de la integral definida.

Ejemplo

Calcula la integral definida:

$$\int_{1}^{2} x^3 \cdot dx$$

y representa geométricamente el resultado.

Calculamos la integral:

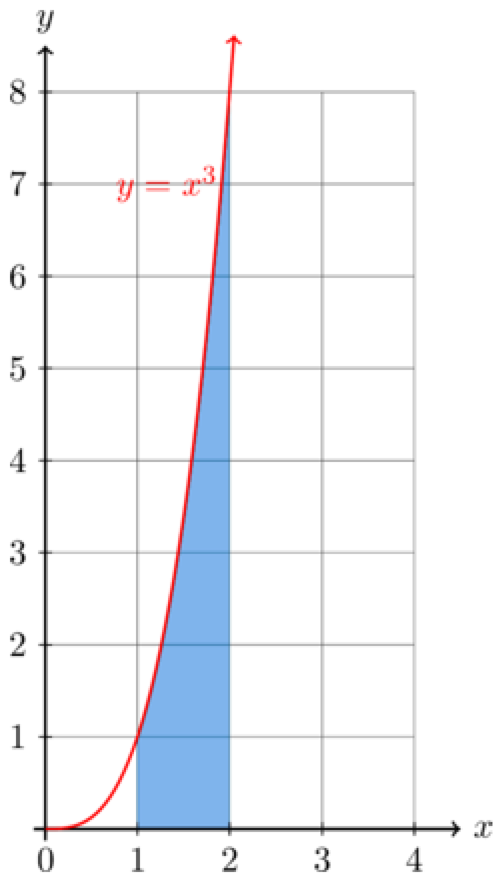
$$\int_{1}^{2} x^3 \cdot dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{1}^{2}$$

Ahora evaluamos:

$$\int_{1}^{2} x^3 \cdot dx = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$

Este resultado representa el área bajo la curva $y = x^3$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ y sobre el eje x. El cálculo de esta integral definida también se puede realizar utilizando la definición:

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$



Ejemplo

Calcula la siguiente integral definida:

$$\int_2^5 e^{-x} \cdot dx$$

La integral da:

$$\int_2^5 e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}\Big|_2^5 = -e^{-5} + e^{-2} \approx 0.128597$$

Interpreta geométricamente este resultado

1.3 SUMAS DE RIEMANN.

Definición:

La suma de Riemann es una técnica que se utiliza para estimar el área bajo una curva mediante la subdivisión del área en rectángulos más pequeños. Consideremos una función f(x) definida en un intervalo [a,b]. La suma de Riemann se puede aproximar mediante la siguiente fórmula:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f_{(x)} \cdot \Delta_{x_i}$$

Donde:

n es el número de subdivisiones del intervalo.

xi son puntos de la partición.

Δxi es la longitud de cada subintervalo.

Proceso de aproximación:

Se divide el intervalo [a,b] en n subintervalos de igual longitud $\Delta_{x_i} = \frac{b-a}{n}$

Se selecciona un punto x_i en cada subintervalo.

Se evalúa la función $f(x_i)$ en cada punto seleccionado.

Se multiplica $f(x_i)$ por la longitud del subintervalo Δx_i

Se suman todos estos productos para obtener la aproximación de la integral.

Convergencia:

A medida que n tiende a infinito y la longitud de los subintervalos tiende a cero, la suma de Riemann converge hacia el valor exacto de la integral definida.

Interpretación geométrica:

La suma de Riemann representa la suma de áreas de rectángulos debajo de la curva. A medida que n aumenta, la aproximación se vuelve más precisa y se acerca al área real bajo la curva.

Importancia en el cálculo integral:

La suma de Riemann es esencial para comprender y calcular integrales definidas. Además, es la base para conceptos más avanzados, como las integrales impropias y la teoría de la medida, por lo que a continuación se enumeran algunas de las causas por las que es tan importante en el cálculo integral.

1. Definición Rigurosa de la Integral Definida: La suma de Riemann proporciona una forma rigurosa de definir la integral definida. Al considerar la convergencia de la suma de Riemann cuando el número de subintervalos n tiende a infinito, se obtiene una definición precisa de la integral definida como límite de sumas de Riemann.

2. Conexión con el Área bajo la Curva: La suma de Riemann permite aproximar el área bajo una curva, que es una aplicación crucial en problemas del mundo real. Por ejemplo, en física, puede representar la acumulación de cantidades como velocidad, masa o flujo a lo largo de un intervalo de tiempo.

3. Aplicación en Problemas de Física e Ingeniería: En disciplinas como la física y la ingeniería, la suma de Riemann se utiliza para modelar y resolver problemas relacionados con la acumulación de cantidades, como la velocidad para calcular distancia recorrida o la densidad para calcular masa.

4. Teorema Fundamental del Cálculo: El Teorema Fundamental del Cálculo establece una conexión profunda entre derivadas e integrales. La suma de Riemann proporciona la base para la comprensión de este teorema, que es esencial en el análisis matemático y tiene amplias aplicaciones en ciencias y ingeniería.

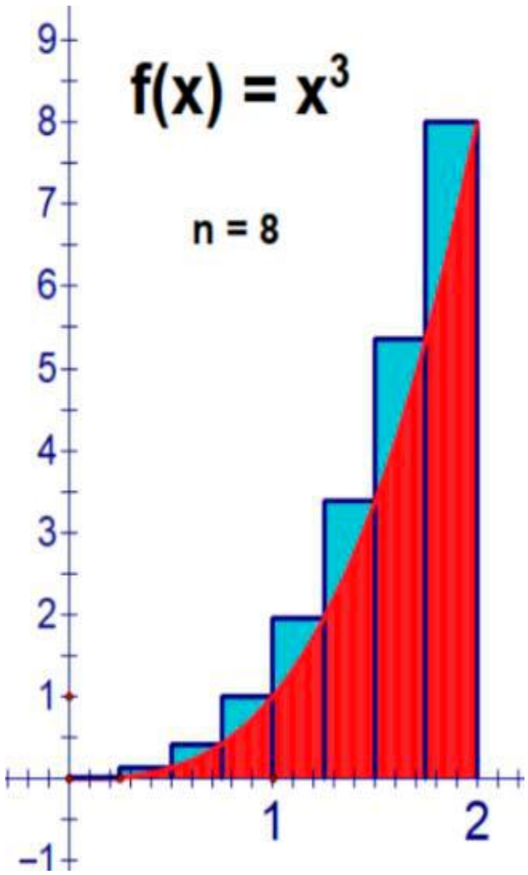
5. Desarrollo de Métodos Numéricos: La suma de Riemann ha llevado al desarrollo de métodos numéricos para aproximar integrales definidas. Estos métodos, como la regla del trapecio o la regla de Simpson, se basan en la idea de dividir el intervalo en subintervalos y aproximar el área mediante polinomios interpoladores.

6. Generalización a Integrales Múltiples: El concepto de suma de Riemann se generaliza a integrales múltiples, lo que es fundamental en cálculo de varias variables

y en campos como la física teórica y la estadística, donde se manejan funciones de varias variables.

7. Fundamento para Otras Teorías Matemáticas: La suma de Riemann es un paso crucial hacia la comprensión de conceptos más avanzados en matemáticas, como la teoría de la medida y la integración estocástica. Además, establece la base para el desarrollo de la teoría de funciones reales y análisis matemático.

EJEMPLO



Calcula en intervalo sobre el eje x de la gráfica de la función.

INTERVALO = 2-0 = 2

Calcula el ancho de cada rectángulo.

$$\Delta_{x_i} = \frac{2}{8} = 0.25$$

Determina los valores de los extremos derechos de cada rectángulo.

x= 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75 y 2.

Calcula la altura de cada rectángulo.

$$f_{(x)} = x^3$$

$f_{(0.25)} = (0.25)^3 = 0.015625$

$f_{(0.5)} = (0.5)^3 = 0.125$

$f_{(0.75)} = (0.75)^3 = 0.421875$

$f_{(1)} = (1)^3 = 1$

$f_{(1.25)} = (1.25)^3 = 1.953125$

$f_{(1.5)} = (1.5)^3 = 3.375$

$f_{(1.75)} = (1.75)^3 = 5.359375$

$f_{(2)} = (2)^3 = 8$

Calcula el área de cada rectángulo

A=($base$)($altura$)

$$A_1 = (0.25)(0.015625) = 0.00390625$$

$$A_2 = (0.5)(0.125) = 0.0625$$

$$A_3 = (0.75)(0.421875) = 0.31640625$$

$$A_4 = (1)(1) = 1$$

$$A_5 = (1.25)(1.953125) = 2.44140625$$

$$A_6 = (1.5)(3.375) = 5.0625$$

$$A_7 = (1.75)(5.359375) = 9.37890625$$

$$A_8 = (2)(8) = 16$$

Calcula la suma de las áreas de los rectángulos.

$$A_T = 0.00390625 + 0.0625 + 0.31640625 + 1 + 2.44140625 + 5.0625 + 9.37890625 + 16$$

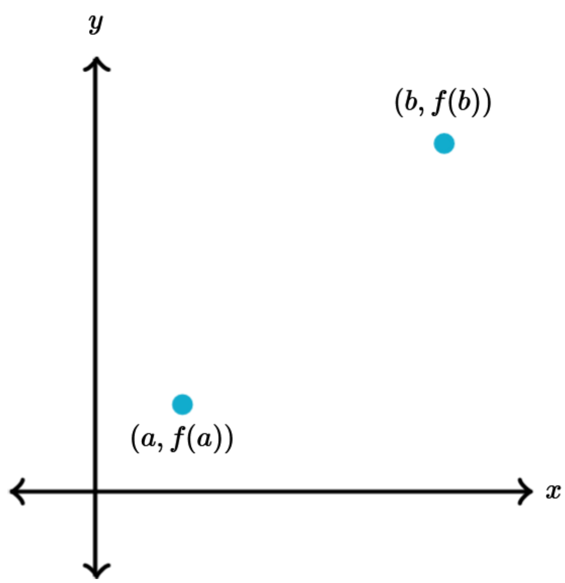
$$A_T = 34.265625$$

1.8 Teorema del valor medio

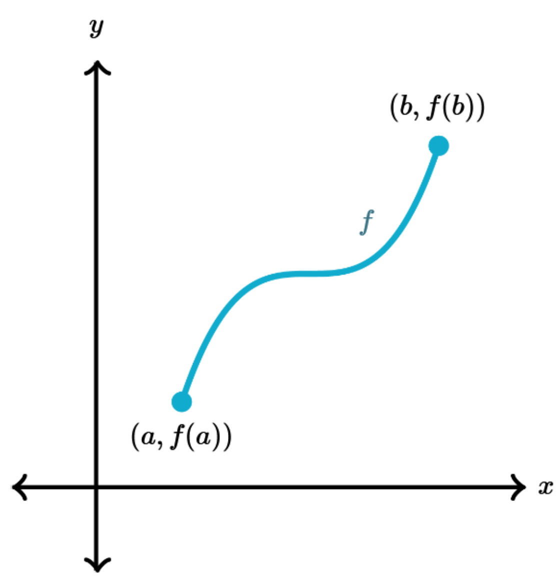
El teorema del valor intermedio describe una propiedad fundamental de las funciones continuas: si *f* es una función continua en el intervalo [*a, b*], entonces alcanzará cualquier valor entre *f(a)* y *f(b)* en el intervalo.

Más formalmente, significa que para cualquier valor *L* entre *f(a)* y *f(b)*, existe un valor *c* en [*a, b*] tal que *f(c)=L*

Este teorema tiene mucho sentido cuando consideramos el hecho de que dibujamos las gráficas de las funciones continuas sin levantar el lápiz. Si sabemos que la gráfica pasa por los puntos *(a, f(a))* y *(b, f(b))*



...entonces debe pasar por cualquier valor de *y* entre *f(a)* y *f(b)*.



Este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto.

Si *f* es continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un número c en este intervalo tal que

f(c)(b - a) = $\int_a^b f(x)dx$

Demostración:

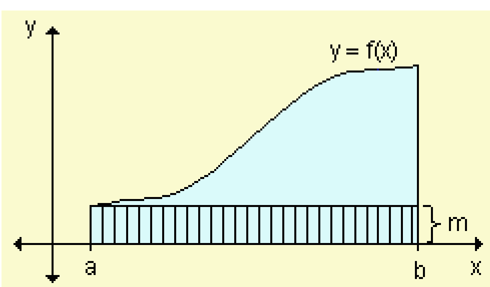
Primer caso: Si f es constante en el intervalo [a, b] el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto.

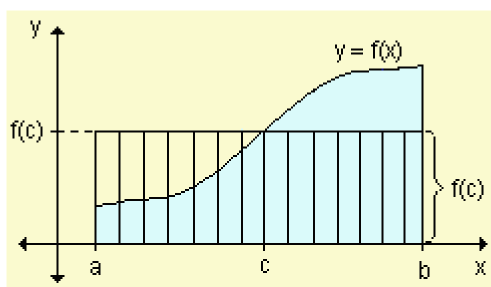
Segundo caso: Si f no es constante en [a, b] elegimos m y M como el menor y mayor valor que toma f en el intervalo. Dado que m £ f(x) £ M " x Î [a, b] por el teorema de conservación de desigualdades.Aplicando propiedades:

m(b - a) M(b - a) $\le \int_a^b f(x)dx \le$ entonces m $\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le$ M.

Dado que f es continua el teorema del valor intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo. Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ en algún punto c del intervalo. [a, b]. Queda demostrado que existe algún c tal que f(c) = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interpretación gráfica del teorema para una función positiva:



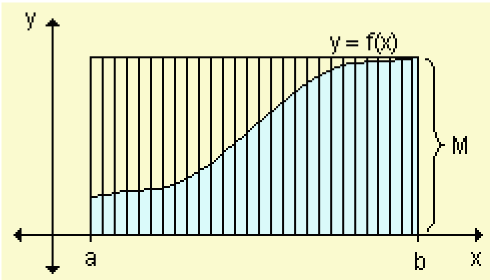


rectángulo inscripto (área menor que la de la región)

$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$

rectángulo del valor medio (área igual que la de la región)

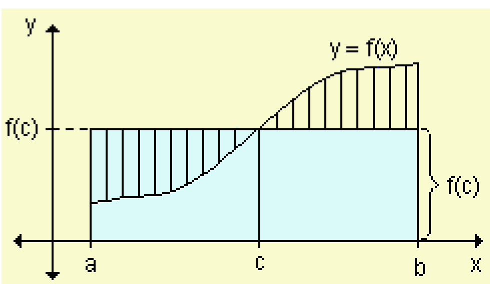
$\int_a^b f(x)dx$



rectángulo circunscripto (área mayor que la de la región) $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$

El valor de c no es necesariamente único. Este teorema no especifica cómo determinar c. Solamente garantiza la existencia de algún número c en el intervalo. Permite una interpretación interesante para el caso en que f es no negativa en [a, b]. En este caso $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la gráfica de *f* entre a y b. El teorema asegura que existe un valor c del intervalo al que está asociado *f*(c) que corresponde a la altura del rectángulo de longitud de la base (b - a) y su área coincide con la de la región.

A= $\int_a^b f(x)\,dx$ = *f*(c)(b - a)

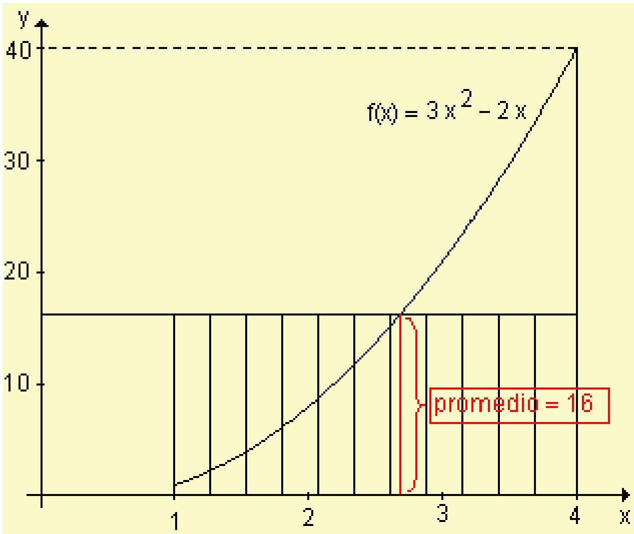


El valor de *f*(c) hallado según el teorema del valor medio para integrales coincide con el valor promedio o medio de una función por eso a *f*(c) = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ se lo llama valor medio de *f* en el intervalo [a, b].

Ejemplo: halle el valor promedio de *f*(x) = 3x2 - 2x en el intervalo [1, 4].

Calculamos:

fprom = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ = $\frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx$ = $\frac{1}{3}\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_1^4$ = $\frac{1}{3}$ (64 - 16 -1 + 1) = 16



Sabemos que el área de la región es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor promedio. Se puede observar gráficamente.

CONCLUSION

Calculo integral está conformado por unidades diferentes tienen temas para el desarrollo de sí mismas, es muy importante a ver visto algebra trigonometría y geometría analítica, calculo diferencial lo cual hace que se comprenda mejor.

Lo anterior conlleva a que el curso de cálculo integral, es importante para desarrollo comprensión de otros cursos de mayor nivel como las ecuaciones diferenciales, el cálculo vectorial de los métodos numéricos , la geometría diferencial, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- •https://www.lifeder.com/suma-de-riemann/
- •https://es.wikipedia.org/wiki/Suma_de_Riemann
- •https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-2/a/riemann-sums-review
- •https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0%29
- https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/integral-definida/
- https://www.hiru.eus/es/matematicas/la-integral-definida
- https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/5-2-la-integral-definida
- https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-16/a/intermediate-value-theorem-review
- https://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/TeoremaValorMedio.htm

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SAN ANDRÉS TUXTLA

INGENIERÍA MECATRÓNICA

CALCULO INTEGRAL

PROBLEMARIO

UNIDAD I

PROF. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO

ALESSANDRO MARTINEZ SOLÍS – 231U0383

KAROL GUADALUPE RODRIGUEZ CORTÉS – 231U0396

LUIS FABIO LUCHO PAXTIAN – 231U0379

JOSHUA DOMINGUEZ CRUZ – 231U0369

GIOVANNI DE JESÚS HIDALGO BRAVO – 231U0377

211-A

SAN ANDRÉS TUXTLA VERACRUZ

4 DE MARZO 2024

INDICE

FORMULAS BASICAS DE LA INTEGRACION

Formulario Unidad 1.

Formulas Basicas de integración

Formula 1

$\int 0\, dx = C$

1.- $\int 5 dx = 5x + C$

2.- $\int 8 dx = 8x + C$

3.- $\int 18 dx = 18x + C$

Formula 2.

$\int dx = x + C$

$y = x + C$

$f(x) = x$

1.- $\int_3^5 dx = (5) - (3) = 5 - 3 = 2$

2.- $\int_{15}^{18} dx = (18) - (15) = 18 - 15 = 3$

3.- $\int_7^8 dx = (8) - (7) = 8 - 7 = 1$

1.- $\int 4 dx = 4 + C$

$y = 4 + C$

$f(4) = 4$

2.- $\int 2 dx = 2 + C$

$y = 2 + C$

$f(2) = 2$

3.- $\int 25 dx = 25 + C$

$y = 25 + C$

$f(25) = 25$

Formula 3

$$\int k\,dx = k\int dx = kx + C$$

1.- $\int 15\,dx = 15\int dx = 15x + C$

2.- $\int 35\,dx = 35\int dx = 35x + C$

3.- $\int 88\,dx = 88\int dx = 88x + C$

1.- $\int_1^2 3\,dx = (3*2) - (3*1) = 6 - 3 = 3$

2.- $\int_3^4 5\,dx = (5*4) - (5*3) = 20 - 15 = 5$

3.- $\int_4^7 4\,dx = (4*7) - (4*4) = 28 - 16 = 12$

D M A

Formula 4°: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

1.- $\int_0^4 x\,dx = F(4) - F(0) = \frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{0}{2} = 8$ $\quad 8u^2$

2.- $\int_{-2}^{8} x\,dx = F(8) - F(-2) = \frac{(8)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{64}{2} - \frac{4}{2} = 32 - 2 = 30$ $\quad 30u^2$

3.- $\int_5^{10} x\,dx = F(10) - F(5) = \frac{(10)^2}{2} - \frac{(5)^2}{2} = \frac{100}{2} - \frac{25}{2} = 50 - 12.5 = 37.5$ $\quad 37.5u^2$

Formula 5°: $\int kx\,dx = k\int x\,dx = \frac{kx^2}{2} + C$

1.- $\int_0^5 3x\,dx = F(5) - F(0) = \frac{3(5)^2}{2} - \frac{3(0)^2}{2} = \frac{3(25)}{2} - \frac{3(0)}{2} = \frac{75}{2} - \frac{0}{2} = 37.5$ $\quad 37.5u^2$

2.- $\int_6^{10} 8x\,dx = F(10) - F(6) = \frac{8(10)^2}{2} - \frac{8(6)^2}{2} = \frac{8(100)}{2} - \frac{8(36)}{2} = \frac{800}{2} - \frac{288}{2} = 400 - 144 = 256$ $\quad 256u^2$

3.- $\int_2^6 10x\,dx = F(6) - F(2) = \frac{10(6)^2}{2} - \frac{10(2)^2}{2} = \frac{10(36)}{2} - \frac{10(4)}{2} = \frac{360}{2} - \frac{40}{2} = 180 - 20 = 160$ $\quad 160u^2$

FORMULA 6:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} + C \; ; \; n \neq -1$$

EJEMPLOS:

① $\int_0^2 x^7 dx = F(2) - F(0) = \frac{(2)^8}{8} - \cancel{\frac{(0)^8}{8}} \to 0 = \frac{256}{8} = \underline{32}$

② $\int_0^4 x^5 dx = F(4) - F(0) = \frac{(4)^6}{6} - \cancel{\frac{(0)^6}{6}} \to 0 = \frac{4096}{6} = \underline{682.666\overline{6}}$

③ $\int_5^7 x^2 dx = F(7) - F(5) = \frac{(7)^3}{3} - \frac{(5)^3}{3} = \frac{343}{3} - \frac{125}{3} = \frac{218}{3} = \underline{72.6666}$

FORMULA 7:

$$\int kx^n\,dx = k\int x^n\,dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

EJEMPLOS:

① $\int_0^1 2x^3\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = \frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$

$F(1) - F(0) = \frac{(1)^4}{2} - \cancel{\frac{(0)^4}{2}} = \frac{1}{2}$

② $\int_1^3 3x\,dx = 3\int_1^3 x\,dx = \frac{3x^2}{2}$

$F(3) - F(1) = \frac{3(3)^2}{2} - \frac{3(1)^2}{2} = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$

③ $\int_1^5 4x^3\,dx = 4\int_1^5 x^3\,dx = \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} = x^4$

$F(5) - F(1) = (5)^4 - (1)^4 = 625 - 1 = 624$