INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

EVALUACIÓN ESCRITA DE LA UNIDAD I

NOMBRE DEL DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATÙRA: ECUACIONES DIFERENCIALES
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Perla Joselin Quino Caixba		CARRERA: ING. MECATRONICA
GRUPO: 411-A	FECHA: 01/03/2024	PERIODO ESCOLAR: FEBRERO -JUNIO 2024
INSTRUCCIONES		
Lea cuidadosamente y conteste correctamente lo que se te solicita. El tiempo para responder es de 50 minutos. Si tiene alguna duda sobre lo que se te solicita pregunta al docente. Se puede utilizar calculadora y formulario.		

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

Ejercicio 1

PORCENTAJE OBTENIDO 50%

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{3x+1}{x}\right)y = \frac{e^{-3x}}{x}$$

Ejercicio 2

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{15}{100-5x}\right)y = 1$$

Examen Unidad 1

Ecuaciones Diferenciales

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

Ejercicio 1

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{3x+1}{x}\right)y = \frac{e^{-3x}}{x}$$

- Para resolver una EDO lineal debe estar en su forma estandar

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x)}$$

- Se resuelve utilizando la fórmula

$$\boxed{ye^{\int P(x)dx} = \int F(x)e^{\int P(x)dx} dx + C}$$

$$P(x) = \left(\frac{3x+1}{x}\right)$$

$$F(x) = \left(\frac{e^{-3x}}{x}\right)$$

Sustituir datos en la fórmula

$$ye^{\int P(x)dx} = \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$ye^{\int\left(\frac{3x+1}{x}\right)dx} = \int\left(\frac{e^{-3x}}{x}\right)e^{\int\left(\frac{3x+1}{x}\right)dx} dx + C$$

• Se resuelve la integral que esta como exponente del número e.

$$\int\left(\frac{3x+1}{x}\right)dx = \int \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int 3 + \frac{1}{x}\, dx = \int 3\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\boxed{3x + \ln|x| + C}$$

• Se sustituye el $3x + \ln|x|$ en la fórmula

$$ye^{3x+\ln|x|} = \int\left(\frac{e^{-3x}}{x}\right)e^{3x+\ln|x|} dx + C$$

$$ye^{3x}\cdot e^{\ln x} = \int\left(\frac{e^{-3x}}{x}\right)e^{3x}\cdot \cancel{e}^{\cancel{\ln} x} dx + C$$

$$ye^{3x}\cdot x = \int \left(\frac{e^{-3x}}{x}\right) e^{3x} \cdot x \, dx + C$$

$$ye^{3x}\cdot x = \int \frac{1}{x}(x)\, dx + C$$

$$\frac{e^{-3x}}{x} \cdot e^{3x} = \frac{1}{x}$$

$$ye^{3x}\cdot x = \int 1 \, dx + C$$

$$ye^{3x}\cdot x = x + C$$

$$\frac{1}{x} \cdot x = 1$$

$$y = \frac{x}{e^{3x}\cdot x} + \frac{C}{e^{3x}\cdot x}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{3x}} + \frac{C}{e^{3x}\cdot x}}$$

Ejercicio 2

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{15}{100-5x}\right) y = 1$$

$$P(x) = \left(\frac{15}{100-5x}\right)$$

$$F(x) = 1$$

- Sustituir los datos en la fórmula

$$y e^{\int P(x)\,dx} = \int F(x) e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C$$

$$y e^{\int \left(\frac{15}{100-5x}\right) dx} = \int 1 e^{\int \left(\frac{15}{100-5x}\right) dx}\, dx + C$$

- Se resuelve la integral que esta como exponente del número e.

$$\int \left(\frac{15}{100-5x}\right) dx = 15 \int \left(\frac{1}{100-5x}\right) dx$$

Se integra por sustitución

$$u = 100 - 5x$$

$$du = -5\, dx$$

$$\frac{du}{-5}\, dx \rightarrow -\frac{1}{5}$$

$$15\left(-\frac{1}{5}\right)\int \frac{1}{u}\,du = 15\left(-\frac{1}{5}\right)\int\left(\frac{1}{100-5x}\right)dx$$

$$15\left(-\frac{1}{5}\right)\ Ln\ |(100-5x)| + C$$

$$\boxed{-3\ Ln\ |(100-5x)| + C}$$

· Se sustituye $-3\ Ln|(100-5x)|$ en la fórmula

$$ye^{-3\ Ln|(100-5x)|} = \int e^{-3\ Ln\ |100-5x|}\,dx + C$$

$$y\cancel{e}^{(\cancel{Ln}|100-5x|)^{-3}} = \int \cancel{e}^{(\cancel{Ln}|100-5x|)^{-3}}\,dx + C$$

$$y(Ln|100-5x|)^{-3} = \int (Ln\,|100-5x|)^{-3}\,dx + C$$

· Se integra

$$\int (Ln\,|100-5x|)^{-3} = \int \frac{1}{(Ln\,|100-5x|)^{3}}$$

$u = 100 - 5x$

$du = -5$

$$-\frac{1}{5}\int (100-5x)^{-3}\,(-5\,dx)$$

$$-\frac{1}{5}\frac{(100-5x)^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{5}\frac{(100-5x)^{-2}}{-2}$$

$$=\frac{1}{10}(100-5x)^{-2}$$

$$=\frac{1}{10(100-5x)^2}+C$$

$$y=(100-5x)^{-3}=\int(100-5x)^{-3}\,dx+C$$

$$y=(100-5x)^{-3}=\frac{1}{10(100-5x)^2}+C$$

$$y=\frac{\frac{1}{10(100-5x)^2}}{(100-5x)^3}+\frac{C}{(100-5x)^3}$$

$$y=\frac{\frac{1}{10(100-5x)^2}}{\frac{1}{(100-5x)^3}}+\frac{\frac{C}{1}}{\frac{1}{(100-5x)^3}}$$

$$y=\frac{(100-5x)^3}{10(100-5x)^2}+C(100-5x)^3$$

$$\boxed{y=\frac{(100-5x)^3}{10(100-5x)^2}+C(100-5x)^3}$$

LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO	ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES	
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO: QUINO CAIXBA PERLA JOSELIN	UNIDAD: I	
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2024	GRUPO: 411 A	FECHA DE ENTREGA: 23/02/2024
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	**NO**	
3%	**PRESENTACIÓN:** la investigación cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación **b.** letra legible **c.** Limpieza y orden **d.** Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía)	√		
2%	Maneja el lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia y secuencia entre párrafos	√		
2%	**INTRODUCCIÓN**: Da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las referencias bibliográficas que se utilizaron para su redacción.	√		
8%	**CONTENIDO**: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo, es digerible a todo público y presenta una metodología **COHERENCIA Y COHESIÓN:** Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo y es digerible a todo público coherente.	√		
3%	**Conclusiones**: Las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.	√		
2%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha señalada.	√		
20%	CALIFICACIÓN	20%		

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO (A): QUINO CAIXBA PERLA JOSELIN		Problemario de la Unidad: 1
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2024	GRUPO:411 A	FECHA DE ENTREGA: 05/03/2024
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5 %	**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	√		
5 %	**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno	√		
10 %	**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.	√		
5 %	**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades	√		
5 %	**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	√		
30 %	**CALIFICACIÓN**	30%		

TEMA: ECUACIONES DIFERENCIALES

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

Ingeniería mecatrónica IMCT-2010-229 Grupo: 411A

INVESTIGACIÓN DE LA UNIDAD 1

Ecuaciones Diferenciales

Docente:

ING. Pablo Promotor Campechano

Presenta:

Juan José Jiménez Reyes	**221U0541**
Juan José Marcial Fiscal	**221U0547**
Perla Joselin Quino Caixba	**221U0555**
Rocio Teoba Herrera	**221U0562**
Osswill Uriel Ventura Gracia	**221U0566**

San Andrés Tuxtla Veracruz 23 de febrero de 2024

INDICE

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden constituyen una parte esencial del panorama matemático aplicado, destacándose por su papel crucial en la descripción y análisis de fenómenos dinámicos en diversas disciplinas científicas. Este trabajo se centra en el estudio detallado de estas ecuaciones, explorando sus propiedades fundamentales, métodos de resolución y aplicaciones prácticas.

En el ámbito académico y científico, el análisis de ecuaciones diferenciales va más allá de una mera empresa teórica; representa una herramienta valiosa para abordar problemas concretos y complejos. La investigación se estructura en torno a la revisión de métodos analíticos y numéricos para resolver EDO de primer orden, respaldados por ejemplos específicos que ilustran la utilidad práctica de los conceptos teóricos. Se abordarán cuestiones clave como la estabilidad y la existencia y unicidad de soluciones, proporcionando así un marco completo para la comprensión y aplicación de estas ecuaciones.

Este estudio tiene como objetivo principal contribuir al conocimiento académico y al desarrollo de habilidades analíticas, ofreciendo una visión integral de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y su importancia en la resolución de problemas del mundo real.

1.1 Teoria Preliminar

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**) son ecuaciones que involucran derivadas de una o más funciones desconocidas con respecto a una variable independiente. Cuando solo se involucra la primera derivada, se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden generalmente tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\ (x, y)$$

donde $\mathbf{y}$ es la función desconocida y $\mathbf{f(x, y)}$ es una función dada. La solución de esta ecuación es encontrar una función $\mathbf{y(x)}$ que satisface la relación dada.

Algunos conceptos clave en la teoría de EDO de primer orden incluye:

Solución General y Particular

La solución general de una EDO incluye todas las posibles soluciones y generalmente implica la inclusión de una constante arbitraria. La solución particular se obtiene al imponer condiciones iniciales o de contorno específicas en la ecuación, lo que restringe la constante y proporciona una solución única.

Métodos de Resolución

- Separación de Variables: Un método común implica reorganizar la ecuación para tener todas las $\mathbf{y}$**-dependientes** en un lado y todas las $\mathbf{x}$**-dependientes** en el otro. Luego se integran ambos lados.
- Factor Integrante: En ciertos casos, se utiliza un factor integrante para simplificar la forma de la ecuación, convirtiéndola en una forma más fácil de integrar.

Existencia y Unicidad de Soluciones

La teoría de ecuaciones diferenciales aborda la existencia y unicidad de soluciones. Es crucial verificar las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia de una solución y que esta sea única. Teoremas como el Teorema de Existencia y Unicidad de **Picard-Lindelöf** son fundamentales en este contexto.

Interpretación Geométrica

La solución de una **EDO** de primer orden puede interpretarse geométricamente como la construcción de curvas integrales en el plano $\mathbf{x}\ \mathbf{y}$. Cada curva integral representa una solución única.

Aplicaciones

Las EDO de primer orden tienen aplicaciones en diversas disciplinas, como física, biología,

1.1.1 Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado, linealidad)

Las expresiones "diferencial" y "ecuación" claramente sugieren la resolución de ecuaciones que incluyen derivadas. No obstante, antes de emprender la resolución de cualquier ecuación, es esencial familiarizarnos con las definiciones básicas y la terminología asociada a este campo.

La derivada dy/dx de una función $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ representa en sí misma otra función $g'(x)$ que se encuentra mediante una regla específica. Por ejemplo, la función $y = e^{0.1x^2}$ es diferenciable sobre el intervalo $(-\infty,\ \infty)$, y su derivada es $dy/dx = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si reemplazamos $e^{0.1x^2}$. por el símbolo y, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

Ahora, imagina que un amigo te presenta únicamente la ecuación diferencial de la expresión (1), sin proporcionar información sobre cómo se derivó. Tu amigo te plantea la pregunta: "¿Cuál es la función representada por el símbolo y?" De repente, te encuentras ante uno de los desafíos fundamentales que se presentan en un curso de ecuaciones diferenciales: ¿cómo resolver una ecuación de este tipo para encontrar la función desconocida $\mathbf{y} = \Phi\ (\mathbf{x})$? Este problema es esencialmente equivalente al conocido desafío del cálculo diferencial inverso: dado una derivada, determinar una antiderivada.

Definición de una Ecuación Diferencial (ED)

Una ecuación diferencial se define como una expresión matemática que incluye una función cuya derivada se desconoce. En términos simples, describe la relación entre una función y sus tasas de cambio. Estas ecuaciones son esenciales en matemáticas aplicadas y encuentran aplicación en la modelización de diversos fenómenos científicos y de ingeniería.

La forma general de una **ecuación diferencial (ED)** se expresa como:

$$F\left(x, \quad y, \quad y', \quad y'', \dots, \quad y^{(n)}\right) = 0$$

Aquí, y representa la función desconocida de x, y' su primera derivada respecto a x, y'' la segunda derivada, y x, $y^{(n)}$ la derivada de orden n. La función F describe la relación entre la función y sus derivadas.

Con el objetivo de referirnos a ellas, debemos clasificar las ecuaciones diferenciales por tipo, orden y linealidad.

- **Clasificación por tipo.**

Si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina ecuación diferencial parcial (EDP). Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Son ecuaciones diferenciales parciales.

- **Clasificación por orden**

El orden de una ecuación diferencial (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Por ejemplo,

Segundo orden

Primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se escriben ocasionalmente en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Por ejemplo, si suponemos que y representa la variable dependiente en $(y - x)\,dx + 4xdy = 0$, entonces

$\boldsymbol{y' = \ dy/dx}$, y así al dividir entre el diferencial dx obtenemos la forma alternativa

$\boldsymbol{4xy' \ + \ y = \ x}$.

De manera simbólica, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden como una variable dependiente empleando la forma general

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', \ldots y^{(n)}\right) = 0}$$

donde F es una función con valores reales de $\mathbf{n+2}$ variables: $\boldsymbol{x, y, y', \ldots, y^{n}}$. Tanto por motivos prácticos como teóricos, de aquí en delante debemos suponer que es posible resolver una ecuación diferencial ordinaria presentada en la forma (4) únicamente para la derivada más alta $\boldsymbol{y}^{n}$ en términos de las variables $\mathbf{n+1}$ restantes. La ecuación diferencial

$$\boldsymbol{\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}$$

donde F es una función continua con valores reales, se denomina forma normal de (4).De este modo, cuando nos sea útil, debemos utilizar las formas normales

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad \textbf{y} \qquad \boldsymbol{\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')}$$

para representar ecuaciones diferenciales generales ordinarias de primero y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden $4xy' + y = x$ es

$$y' = \frac{(x - y)}{4x}$$

- **Clasificación por linealidad**

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden (4) es lineal si F es **lineal** en $y, y', \colon., y^n$**.** Esto significa que una EDO de ***n-ésimo*** orden es lineal cuando (4) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Dos casos especiales de (6) son las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (n=1) y de segundo orden (n= 2):

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

y

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + a_0(x)y = g(x)$$

En la combinación aditiva del extremo izquierdo de (6) observamos que las dos propiedades características de una EDO lineal son:

- La variable dependiente y así como todas sus derivadas y', y'',..., y son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es I.

- Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $y, y', \ldots, y^n$ dependen a lo sumo de la variable independiente x.

Las ecuaciones siguientes, a su vez,

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x;$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Acabamos de demostrar que la primera ecuación es lineal en la variable y al escribirla en la forma alternativa 4xy' +y=x. Una ecuación diferencial ordinaria no lineal simplemente es una ecuación que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como sen y o e', no pueden aparecer en una ecuación lineal. Por lo tanto,

$$\underset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{el coeficiente depende de } y\\ \downarrow}}{(1 - y)y'} + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \underset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{función no lineal de } y\\ \downarrow}}{\text{sen } y} = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \underset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{potencia diferente de 1}\\ \downarrow}}{y^2} = 0,$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primero, segundo y cuarto orden, respectivamente.

1.1.2 Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Toda función Φ, definida sobre un intervalo I y que posea al menos n derivadas continuas sobre I, y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación sobre el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria (4) de n-ésimo orden será una función o que posea al menos n derivadas. Y

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}), \ \ldots, \boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} \ para \ toda \ \boldsymbol{x} \ en \ \boldsymbol{I}$$

Se dice que o satisface la ecuación diferencial sobre I. Para nuestros propósitos, también debemos asumir que una solución o es una función con valores reales. En el análisis inicial se observó que y= d.1e es una solución de dy/dx = 0.2xy sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

En ocasiones resultará conveniente indicar una solución mediante el símbolo alternativo y(x).

- **Intervalo de definición**

No es posible considerar una solución de una ecuación diferencial ordinaria sin pensar al mismo tiempo en un intervalo. El intervalo I de la definición se denomina de diversas maneras: **intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución** y puede ser un intervalo abierto (a, b).un intervalo cerrado [a, b], un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

Ejemplo 1

Compruebe que la función señalada representa una solución de la ecuación diferencial dada, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

a) $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$; $y = \frac{x^4}{16}$

b) $y^n - 2y' + y = 0$; $y = 0$; $y = xe$

- **Solución**

Una forma de verificar que la función indicada representa una solución es revisar, después de sustituir, si cada extremo de la ecuación es igual para cada x localizada dentro del intervalo.

a) Del *extremo izquierdo*: $\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$

extremo derecho: $xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$,

observamos que cada extremo de la ecuación es igual para todo número real x. Advierta que y'2 =x/4 es, por definición, la raíz cuadrada positiva de x°/16.

b) A partir de las derivadas y' =xe' + e'y y"=xe' + 2e tenemos para todo número real x,

extremo izquierdo: $y^n - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$

extremo derecho: 0

Observe también que en el **ejemplo 1** cada ecuación diferencial posee la solución constante $y = 0, -\infty < x < \infty$. La solución a una ecuación diferencial idéntica a cero sobre un intervalo I se dice que es una **solución trivial**.

- ## Curva de solución

La gráfica de una solución o de una EDO se denomina **curva de solución**. Ya que o es una función diferenciable, será continua sobre su intervalo I de definición. De esta forma puede presentarse una diferencia entre la gráfica de la función Φ y la gráfica de la solución Φ. En otras palabras, el dominio de la función o no necesita ser el mismo que el intervalo I de definición (o dominio) de la solución Φ.

1.1.3 Problema de valor inicial

En diversas situaciones, nos vemos confrontados con problemas que requieren encontrar una solución ***y*(*x*)** para una ecuación diferencial, asegurándonos de que dicha solución cumpla con condiciones adicionales establecidas. Estas condiciones pueden ser impuestas tanto sobre la incógnita ***y*(*x*)** como sobre sus derivadas. En el análisis que sigue, nos adentraremos en uno de estos desafíos conocido como el problema inicial de valores.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Donde $\boldsymbol{x_0}$ es el valor inicial de la variable independiente y $\boldsymbol{y_0}$ es el valor inicial de la función en ese punto.

Métodos para Resolver Problemas de Valor Inicial:

1. Métodos Analíticos: Algunas ecuaciones diferenciales pueden resolverse analíticamente utilizando técnicas como separación de variables, variables homogéneas o lineales.

2. Métodos Numéricos: Cuando no es posible encontrar una solución analítica, se recurre a métodos numéricos como el método de Euler, Runge-Kutta u otros métodos más avanzados.

Ejemplo 1:

Consideremos la **EDO** de primer orden $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2x - y}$ con la condición inicial $\boldsymbol{y(0) = 1}$. Resolver este problema implica encontrar la función $\boldsymbol{y\ (x)}$ que satisface la ecuación y la condición inicial.

Ejemplo 2:

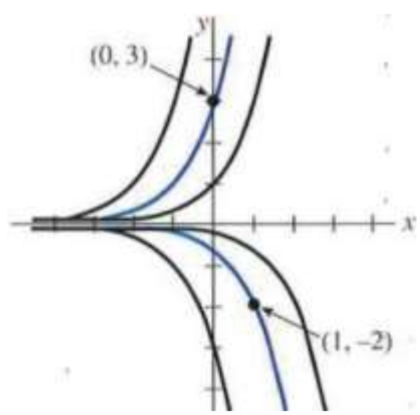
Es posible verificar de manera sencilla que $y = ce^x$ representa una familia de soluciones parametrizadas para la ecuación diferencial de primer orden y′=y, válida en el intervalo (−∞, ∞) (−∞, ∞). Si especificamos una condición inicial, por ejemplo, y (0) =3y (0) = 3, al sustituir y = 0 y y = 3 en la familia de soluciones, se determina que la constante c es igual a 3. Por lo tanto, la función $y = 3e^x$ es una solución del problema de valor inicial.

y′ = y, y (0) = 3.

Ahora, si exigimos que una solución de la ecuación diferencial pase por el punto (1,−2) (1,−2) en lugar de (0,3) (0,3), entonces y (1) =−2y (1) =−2 nos dará $-2 = ce^0 = c$. En consecuencia, la función $-2 = e^{x-1}$. es una solución del problema de valor inicial.

y′ = y, y (1) = −2.

Las gráficas de estas dos funciones se muestran en la figura 1.9.



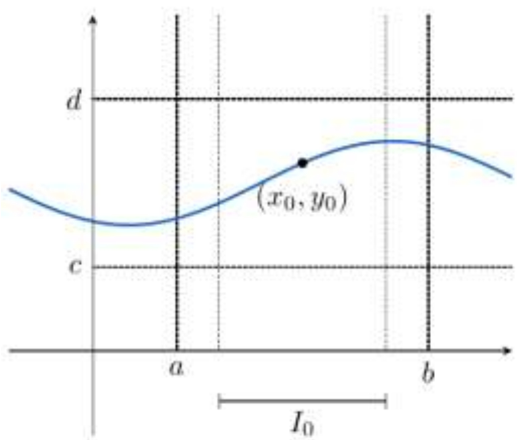
1.1.4 Teorema de existencia y unicidad

El Teorema de Existencia y Unicidad es un resultado importante en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias **(EDO).** Este teorema establece condiciones bajo las cuales una EDO tiene solución única y garantiza que la solución existe en un intervalo específico.

Considerando una ecuación diferencial de la forma $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y R una región rectangular en el plano $\mathbf{XY}$ que contiene al punto $(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0})$ en su interior, definida por

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \ \leq \mathbf{b}\ \mathbf{y} \ \ \mathbf{c} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{d}$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dy}}$ son funciones continuas en la región $\mathbf{R}$, entonces existe un intervalo $\mathbf{I_0}$ centrado en x_0 contenido en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ y una única función $\mathbf{y}(\mathbf{x})$**,** definida en el intervalo $\mathbf{I_0}$ que es solución del problema de valor inicial $\mathbf{y}(\mathbf{x_0}) = \ \mathbf{y_0}$**.**



Las ecuaciones diferenciales que consideraremos de aquí en adelante cumplirán con las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad salvo que se diga lo contrario, sin embargo, siempre es importante verificar que se cumplan las condiciones antes de empezar a calcular la solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo:

Si consideramos la ecuación diferencial ordinaria $y - y' = 0$ con problema de valor inicial $y(0) = 1$, esta ecuación cumple con las condiciones del teorema de existencia y unicidad, pues:

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y) = y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

Así, $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en cualquier región R del plano XY, existe un intervalo I_0 centrado en $x_0 = 0$ y una única función $y(x)$, definida en el intervalo I_0 que es solución de la ecuación diferencial con problema de valor inicial $y(0) = 1$.

Particularmente la función $y = e^x$ es una solución de esta ecuación diferencial que satisface la condición dada por el valor inicial, pues:

$$y(0) = e^0 = 1$$

1.3 Aplicaciones

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas, desde física y biología hasta economía e ingeniería. A continuación, se mencionan algunas aplicaciones destacadas:

1. **Dinámica Poblacional:**
   - Las ecuaciones diferenciales describen el crecimiento y la dinámica de poblaciones en ecología y biología. Por ejemplo, el modelo logístico $P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$ describe el crecimiento de una población P en función del tiempo, con r como tasa de crecimiento y K como capacidad de carga del entorno.

2. **Circuitos Eléctricos:**
   - En ingeniería eléctrica, las ecuaciones diferenciales modelan el comportamiento de circuitos eléctricos. Por ejemplo, la ley de Kirchhoff para un circuito RC da lugar a una EDO de primer orden que describe la carga o descarga de un condensador.

3. **Fenómenos de Transferencia de Calor:**
   - Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar la transferencia de calor en sistemas físicos. La ley de enfriamiento de Newton, que describe la tasa de cambio de temperatura de un objeto en función de la diferencia de temperatura con su entorno, es un ejemplo de una EDO de primer orden.

4. **Problemas de Flujo:**

   - En hidrodinámica, las ecuaciones diferenciales modelan el flujo de líquidos en tuberías y canales. La ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad son ejemplos de ecuaciones diferenciales que describen el flujo de fluidos.

5. **Economía y Finanzas:**

   - En economía, las ecuaciones diferenciales modelan el cambio en el tiempo de variables económicas como la inversión, el consumo y la producción. Los modelos económicos dinámicos a menudo involucran ecuaciones diferenciales.

6. **Mecánica Celeste:**

   - En astronomía y física, las ecuaciones diferenciales describen las órbitas de planetas y cuerpos celestes. El problema de los dos cuerpos, que describe la interacción gravitatoria entre dos masas, se formula como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

7. **Biomatemáticas:**

   - En biología y medicina, las ecuaciones diferenciales modelan procesos biológicos como la propagación de enfermedades, la cinética de reacciones bioquímicas y la dinámica de poblaciones celulares.

En resumen, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden emergen como herramientas fundamentales y polifacéticas que desempeñan un papel vital en diversos campos científicos y tecnológicos. Su capacidad intrínseca para capturar y describir cambios en el tiempo las convierte en una herramienta esencial en la resolución de problemas asociados con fenómenos dinámicos. La versatilidad de las EDO de primer orden se manifiesta en su aplicación exitosa en la modelación y predicción de sistemas naturales y artificiales.

Conclusiones

En la culminación de esta investigación sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se ha logrado una comprensión profunda de la importancia y la aplicabilidad de este conjunto específico de ecuaciones en el ámbito matemático aplicado. A través de la revisión exhaustiva de métodos analíticos y numéricos, así como la exploración de ejemplos concretos, se han destacado diversas conclusiones significativas.

En primer lugar, se ha confirmado la relevancia fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la descripción de sistemas dinámicos, demostrando su utilidad en una variedad de disciplinas científicas. La capacidad de modelar y comprender fenómenos cambiantes en términos de tasas de cambio instantáneas ha quedado patente, subrayando la versatilidad de estas ecuaciones.

La aplicación de métodos analíticos, como la separación de variables y la sustitución, ha proporcionado herramientas valiosas para abordar una amplia gama de problemas. La resolución numérica, mediante técnicas como el método de Euler o el método de Runge-Kutta, ha demostrado ser esencial para enfrentar ecuaciones diferenciales que no admiten soluciones analíticas directas.

Además, la exploración de conceptos relacionados con la estabilidad y la existencia y unicidad de soluciones ha contribuido a una comprensión más completa de la teoría subyacente a estas ecuaciones. La capacidad de prever y analizar el comportamiento a largo plazo de los sistemas descritos por ecuaciones de primer orden se revela como un elemento esencial en la aplicación práctica de estos conocimientos.

Fuentes de consulta

[1] Introduccion, “Problemas de Valor Inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: M´etodos Num´ericos de un paso”, Www.um.es. [En línea]. Disponible en: https://www.um.es/documents/4874468/11148435/ivp-ode.pdf/ca345b29-a902-461e-83bc-0851e5256637. [Consultado: 24-feb-2024].

[2] 5. 1. Introduccion, “Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden”, Ulpgc.es. [En línea]. Disponible en: https://www2.ulpgc.es/hege/almacen/download/42/42523/tema5.pdf. [Consultado: 24-feb-2024].

[3] Arias-García, “Teorema de Existencia y Unicidad –”, totumat. [En línea]. Disponible en: https://totumat.com/tag/teorema-de-existencia-y-unicidad/. [Consultado: 24-feb-2024].

[4] Google.com. [En línea]. Disponible en: https://drive.google.com/file/d/1C7H7FhsPpnb4ZxxK0yI6i4DEP5efpkxp/view. [Consultado: 24-feb-2024].

ITSSAT

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla (I.T.S.S.A.T.)

División de Ingeniería Mecatrónica

Ecuaciones Diferenciales

DOCENTE

Ing. Pablo Promotor Campechano

GRUPO

411-A

PERÍODO

Febrero- Junio 2024

UNIDAD 1

PROBLEMARIO UNIDAD 1

ALUMNO:

Jiménez Reyes Juan José	***221U0541***
Marcial Fiscal Juan José	***221U0547***
Quino Caixba Perla Joselin	***221U0555***
Teoba Herrera Rocio	***221U0562***
Ventura Gracia Osswill Uriel	***221U0566***

Resolver los siguientes EDO de variables separables

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$

Solución

Se agrupan los términos

$$dy = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} + y}\, dx$$

$$\sqrt{y} - y \; dy = \sqrt{x} + x \; dx$$

$$y^{1/2} - y \; dy = x^{1/2} + x \; dx$$

Se integra en ambos lados de la EDO

$$\int y^{1/2} - y \; dy = \int x^{1/2} + x \; dx$$

$$\int \frac{y^{1/2 + 2/2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} - \int \frac{y^{1+1}}{1+1} + C_1 = \int \frac{x^{1/2 + 2/2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} + \int \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2$$

$$\frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + C_2 - C_1$$

$$\frac{2\sqrt{y^3}}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{4y^{3/2} - 3y^2}{6} = \frac{4x^{3/2} + 3x^2}{6} + C$$

$$y^{3/2}\left(4 - 3y^{1/2}\right) = x^{3/2}\left(4 + 3x^{1/2}\right) + C$$

$$\boxed{\sqrt{y^3}\,\frac{(4 - 3\sqrt{y})}{6} = \frac{\sqrt{x^3}\,(4 + 3\sqrt{x})}{6} + C}$$

- $y' = \frac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}$$

$$dy = \frac{3x^2\sqrt{16+y^2}}{y}\,dx$$

$$y\,dy = 3x^2\sqrt{16+y^2}\,dx$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{16+y^2}} = 3x^2\,dx$$

$$\frac{y\,dy}{(16+y^2)^{1/2}} = 3x^2\,dx$$

- Integrar por ambos lados de la EDO

$$\int \frac{y}{(16+y^2)^{1/2}}\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$$\int \frac{y}{(16+y^2)^{1/2}}\,dy = \int 3x^2\,dx$$

$u = 16+y^2$

$du = 2y\,dy$

$\frac{du}{2} = y\,dy$

$\frac{3\int x^{2+1}}{2+1}$

$\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + C$

$x^3 + C$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{U^{1/2}} = 3\int x^2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int U^{-1/2}\,du = 3\int x^2\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{U^{-1/2+2/2}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = 3\int x^2\,dx$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\,\frac{U^{1/2}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} = x^3 + C$$

$$U^{1/2} + C_1 = x^3 + C_2$$

$$(16+y^2)^{1/2} + C_1 = x^3 + C_2$$

$$\sqrt{16+y^2} + C_1 = x^3 + C_2$$

$$\sqrt{16+y^2} = x^3 + C_2 - C_1$$

$$\sqrt{16+y^2} = x^3 + C$$

$$\boxed{\sqrt{16+y^2} = x^3 + C}$$

ECUACIONES
diferenciales ordinarias
Lineales

• Resolver las siguientes EDO lineales.

$$x^2 y' + xy = 1$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

* Expresar en forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x)$$

$$\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y = \frac{1}{x^2}}$$ forma estándar

fórmula

$$y e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C.$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

* sustituir en la fórmula.

$$y e^{\int \left(\frac{1}{x}\right) dx} = \int \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\int \left(\frac{1}{x}\right) dx}\, dx + C.$$

* Resolver la integral que está como exponente de "e".

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

* El resultado de la integral se sustituye

$$y e^{\ln|x|} = \int \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\ln|x|}\, dx + C$$

* Usando

$$e^{\ln u} = u \quad \rightarrow e^{\cancel{\ln} x} \rightarrow x$$

$$y e^{\ln x} = \int \left(\frac{1}{x^2} \right) e^{\ln x} \, dx + C$$

$$y x = \int \left(\frac{1}{x^2} \right) x \, dx + C$$

$$x y = \int \left(\frac{x}{x^2} \right) dx + C$$

$$x y = \int \left(\frac{1}{x} \right) dx + C$$

$$x y = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$x y = \ln x + C$$

$$\boxed{y = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{C}{x}}$$ → SOLUCIÓN DE LA EDO