LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

<table>
<tr><td colspan="3">DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO</td><td colspan="3">ASIGNATURA: CÁLCULO VECTORIAL</td></tr>
<tr><td colspan="6">DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">NOMBRE DEL ALUMNO: CHONTAL OBIL OSIRIS MONSERRAT</td><td colspan="4">UNIDAD: 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">PERIODO: AGOSTO-DICIEMBRE 2024</td><td colspan="2">GRUPO: 301 A</td><td colspan="2">FECHA DE ENTREGA: 8/12/2024</td></tr>
<tr><td colspan="6">INSTRUCCIONES</td></tr>
<tr><td colspan="6">Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">VALOR DEL REACTIVO</td><td rowspan="2">CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)</td><td colspan="2">CUMPLE</td><td colspan="2" rowspan="2">OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>5%</td><td>PRESENTACIÓN: la investigación cumple con los requisitos de:
a. Buena presentación
b. letra legible
c. Limpieza y orden
d. Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía)</td><td></td><td>√</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5%</td><td>Maneja el lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia y secuencia entre párrafos</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5%</td><td>INTRODUCCIÓN: Da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las referencias bibliográficas que se utilizaron para su redacción.</td><td></td><td>√</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>25%</td><td>CONTENIDO: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo, es digerible a todo público y presenta una metodología
COHERENCIA Y COHESIÓN: Maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafo y es digerible a todo público coherente.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5%</td><td>Conclusiones: Las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>5%</td><td>Responsabilidad: Entregó la investigación documental en la fecha señalada.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>50%</td><td>CALIFICACIÓN</td><td colspan="4">40%</td></tr>
</table>

INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR DE SAN ANDRES TUXTLA.

ING. INDUSTRIAL

CALCULO VECTORIAL

UNIDAD 5

GRUPO: 301 A

DOCENTE: PABLO PROMOTAR CAMPECHANO

INVESTIGACION

ALUMNOS:

OSIRIS MONSERRAT CHONTAL OBIL
JESSICA DEL CARMEN XALA FISCAL
GENESIS JOHANNA CHAGALA JIMENEZ
CRISTIAN DE JESUS BONOLA ALFONSO

Índice

Introducción

El cálculo integral es una herramienta fundamental en matemáticas, física e ingeniería, que permite resolver problemas relacionados con áreas, volúmenes y otros conceptos geométricos y físicos. Dentro de este marco, los temas abordados en este documento se centran en el cálculo de áreas e integrales dobles, integrales triples en distintas coordenadas, y el estudio de campos vectoriales, que son esenciales para comprender fenómenos complejos en diversas disciplinas.

Se inicia con el cálculo de áreas e integrales dobles, explorando su uso para determinar superficies limitadas por curvas. Posteriormente, se analizan las integrales iteradas y su papel en el cálculo eficiente de estas áreas. La discusión incluye el uso de sistemas de coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas, mostrando cómo adaptar la integración a diferentes contextos geométricos y físicos.

Además, se introduce el concepto de campos vectoriales, describiendo su definición, tipos y aplicaciones. Este estudio se complementa con la integral de línea, que permite calcular trabajo, flujo y otras magnitudes físicas a lo largo de trayectorias específicas. Finalmente, se abordan conceptos avanzados como la divergencia y el rotacional, que proporcionan herramientas clave para entender el flujo y la circulación en campos vectoriales, así como los teoremas fundamentales que conectan estas ideas, incluyendo ejemplos prácticos para su aplicación.

Este recorrido temático busca no solo exponer los conceptos teóricos, sino también ejemplificar su uso práctico, destacando la versatilidad y potencia de las herramientas de integración en la resolución de problemas reales.

5.1 Cálculo de áreas e integrales dobles

Cálculo de áreas e integrales dobles

Las integrales dobles son una herramienta fundamental en el cálculo multivariable para calcular el volumen bajo una superficie o el área de una región plana.

Cálculo de áreas usando integrales iteradas

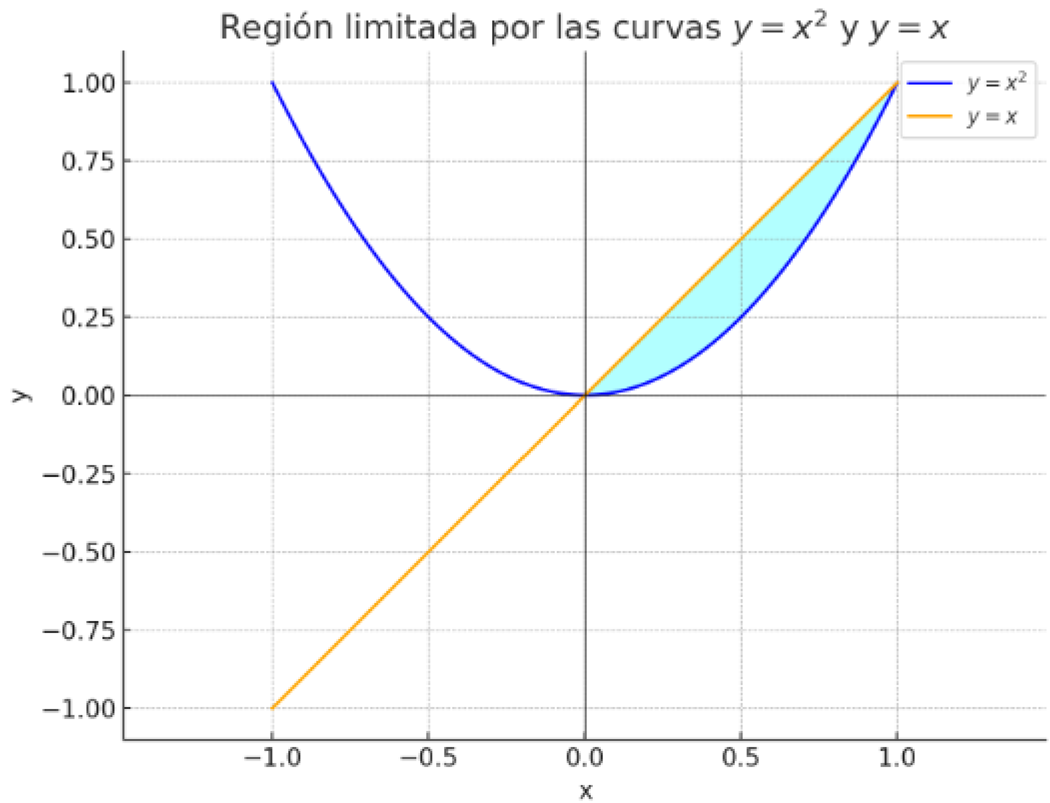
Para calcular el área de una región plana ***R*** en el plano ***xy***, podemos usar integrales iteradas. La idea es dividir la región en pequeñas rectángulos y sumar las áreas de todos los rectángulos. En el límite, cuando los rectángulos se vuelven infinitesimales, la suma se convierte en una integral doble.

Ejemplo 1:

Calcular el área de la región R limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$.

Paso 1: Graficar la región

Primero, graficamos las dos curvas para visualizar la región ***R***.



Paso 2: Definir los límites de integración

La región ***R*** está limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$. Para integrar primero con respecto a ***y***, necesitamos determinar los límites de integración para ***y***. Observe que para un valor fijo de ***x, y*** varía entre x^2 y x . Por lo tanto, los límites de integración para ***y*** son $y = x^2$ y $y = x$.

Para integrar con respecto a ***x***, necesitamos determinar los límites de integración para ***x***. Observe que ***x*** varía entre los puntos de intersección de las dos curvas. Para encontrar los puntos de intersección, resolvemos la ecuación $x^2 = x$. Obtenemos x= 0 y $x = 1$. Por lo tanto, los límites de integración para ***x*** son x= 0 y $x = 1$.

Paso 3: Escribir la integral doble

La integral doble que representa el área de la región ***R*** es:

$$\iint_R dA = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} dx\, dy$$

Paso 4: Evaluar la integral doble

Evaluamos la integral doble paso a paso:

$$\int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{2-y^2} dx\, dy = \int_{-1}^{1} [x]_{y^2}^{2-y^2}\, dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\, dy = [2y - \frac{2y^3}{3}]_{-1}^{1} = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

5.2 Integrales iteradas

Una integral iterada es una integral evaluada varias veces sobre la misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluadas con respecto a diferentes variables).

Es importante tener en cuenta en qué posición se dan los límites de las integrales en cuestión para saber en qué orden se ejecutarán los procesos de integración simple; es decir, reconocer si se va a integrar primero considerando el diferencial dx o el diferencial dy o viceversa.

Se pueden presentar este tipo e integrales:

$$\int_0^1 2xydx \ ; \qquad \int_0^1\int_0^2 dydx \ ; \qquad \int_0^1\int_y^{3y} dxdy \ ;$$

$$\int_0^1 2xydy \ ; \qquad \int_0^1\int_0^2 dxdy \ ; \qquad \int_0^1\int_{x^2}^{2x} dydx$$

Integral doble iterada en dominio simple respecto de x.

Sea $D \subset [a,b] \times [c,d]$ un dominio simple respecto de x y sea $f(x,y)$ continua en D. Se llama Integral doble iterada de f en el dominio D al número:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

que se denota

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

Integral triple iterada en dominio (tridimensional) simple respecto de x, y o de y, x.

Sea $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$ un dominio simple respecto de x, y o de y, x y sea $f(x,y,z)$ continua en D. Se llama Integral triple iterada de f en el dominio D al número:

$$\int\int_{D_1} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

que se denota

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_{D_1} dxdy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Ejercicios de integrales iteradas

a) $$\int_0^2 \int_0^x (x+y)dydx$$

$$\int_0^2 dx\left[\int_0^x (x+y)dy\right] = \int_0^2 dx\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^x = \int_0^2\left[x^2-\frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

b)

$$\int_0^1 \int_{2y^2-3y}^{y-2y^2} 4y\,dxdy$$

$$\int_0^1 4y\,dy\left[\int_{2y^2-3y}^{y-2y^2} dx\right] = \int_0^1 4y\,dy\,x\Big|_{2y^2-3y}^{y-2y^2} = \int_0^1 4y\left[y-2y^2-2y^2+3y\right]dy =$$

$$= \int_0^1 4y\left[4y-4y^2\right]dy = 16\int_0^1\left[y^2-y^3\right]dy = 16\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = 16\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right] = \frac{4}{3}$$

c)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^2y^2e^{-(x^3+y^3)}dxdy$$

$$\int_0^\infty x^2dx\left[\int_0^\infty y^2e^{-(x^3+y^3)}dy\right] = \int_0^\infty x^2dx\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-(x^3+y^3)}\Big|_0^\infty = \int_0^\infty x^2\left(-\frac{1}{3}\right)dx\cdot\left[0-e^{-x^3}\right] =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{1}{3}x^2e^{-x^3}dx = \frac{1}{9}e^{-x^3}\Big|_0^\infty = \frac{1}{9}[0-1] = -\frac{1}{9}$$

5.3 Integral doble en coordenadas rectangulares.

Definición de la Integral Doble

La integral doble es una generalización de la integral definida a funciones de dos variables. Se utiliza para calcular el volumen bajo una superficie en tres dimensiones, o el área de una región plana en dos dimensiones.

Definición Formal:

Definición Formal:

Sea $f(x, y)$ una función continua en una región rectangular R definida por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$. La integral doble de f sobre R se define como:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A_{ij}$$

Donde:

- m y n son el número de divisiones en las direcciones x e y, respectivamente.
- $\Delta A_{ij} = \Delta x \Delta y$ es el área de cada subrectángulo.
- (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es un punto arbitrario en el subrectángulo i, j.

Interpretación Geométrica:

La integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ representa el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie $z = f(x, y)$ y por encima de la región R en el plano xy.

Aplicaciones de la Integral Doble

Las integrales dobles tienen numerosas aplicaciones en diversos campos, incluyendo:

- Cálculo de áreas: La integral doble se puede utilizar para calcular el área de una región plana. Como se vio en el ejemplo anterior, la integral doble de la función constante $f(x, y) = 1$ sobre una región ***R*** es igual al área de ***R***.
- Cálculo de volúmenes: La integral doble se puede utilizar para calcular el volumen de un sólido delimitado por una superficie.
- Cálculo de momentos de inercia: La integral doble se puede utilizar para calcular el momento de inercia de una placa plana.
- Densidad y masa: La integral doble se puede utilizar para calcular la masa de una lámina plana con densidad variable.
- Probabilidad: La integral doble se puede utilizar para calcular probabilidades en problemas de dos variables aleatorias.

- Física y ingeniería: Las integrales dobles se utilizan en muchas aplicaciones de física e ingeniería, como el cálculo de campos electromagnéticos, flujos de calor y fuerzas en estructuras.

Cálculo de Integrales Dobles

Para calcular una integral doble, se utiliza el método de integración iterada. Este método consiste en integrar la función primero con respecto a una variable, manteniendo la otra variable constante, y luego integrar el resultado con respecto a la segunda variable.

Ejemplo:

Calcular la integral doble $\iint_R (x+y)\,dA$, donde R es la región rectangular definida por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 2$.

1. Integración con respecto a ***y***:

$$\int_0^2 (x+y)\,dy = [xy + \frac{y^2}{2}]_0^2 = 2x + 2$$

2. Interpretación con respecto a ***x***:

$$\int_0^1 (2x+2)\,dx = [x^2 + 2x]_0^1 = 3$$

Por lo tanto, la integral doble $\iint_R (x+y)\,dA = 3$.

5.4 Integral doble en coordenadas polares.

Definición de la Integral Doble en Coordenadas Polares

Las coordenadas polares son un sistema de coordenadas que utiliza la distancia al origen (r) y el ángulo con respecto al eje x(0) para describir la posición de un punto en el plano. En coordenadas polares, la integral doble se define como:

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Donde:

- R es la región de integración en el plano polar.
- α y β son los límites de integración para el ángulo θ.
- $r_1(\theta)$ y $r_2(\theta)$ son las ecuaciones de las curvas que delimitan la región R en términos de θ.
- $r\, dr\, d\theta$ es el elemento de área en coordenadas polares.

Interpretación Geométrica:

La integral doble en coordenadas polares representa el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie $z = f(r,\theta)$ y por encima de la región ***R*** en el plano polar.

Aplicaciones de la Integral Doble en Coordenadas Polares

Las integrales dobles en coordenadas polares son particularmente útiles para calcular integrales sobre regiones que tienen simetría radial, como círculos, sectores circulares y regiones delimitadas por curvas que se expresan fácilmente en coordenadas polares. Algunas aplicaciones incluyen:

- Cálculo de áreas: La integral doble en coordenadas polares se puede utilizar para calcular el área de regiones circulares o sectoriales.
- Cálculo de volúmenes: La integral doble en coordenadas polares se puede utilizar para calcular el volumen de sólidos que tienen simetría radial, como conos, cilindros y esferas.
- Cálculo de momentos de inercia: La integral doble en coordenadas polares se puede utilizar para calcular el momento de inercia de objetos con simetría radial.

- Física e ingeniería: Las integrales dobles en coordenadas polares se utilizan en muchas aplicaciones de física e ingeniería, como el cálculo de campos electromagnéticos, flujos de calor y fuerzas en estructuras con simetría radial.

Cálculo de Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Para calcular una integral doble en coordenadas polares, se utiliza el método de integración iterada, similar al caso de las coordenadas rectangulares. Primero se integra con respecto a ***r***, manteniendo θ constante, y luego se integra el resultado con respecto a θ.

Ejemplo:

Calcular la integral doble $\iint_R r^2\, dA$, donde R es la región delimitada por el círculo $r = 2$.

1. Integración con respecto a ***r***:

$$\int_0^2 r^2\, dr = [\frac{r^3}{3}]_0^2 = \frac{8}{3}$$

2. Interpretación con respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\, d\theta = [\frac{8}{3}\theta]_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}$$

Por lo tanto, la integral doble $\iint_R r^2\, dA = \dfrac{16\pi}{3}$.

5.5 Integral triple en coordenadas rectangulares. Volumen

La **integral triple** es una extensión del concepto de integral que se utiliza para calcular volúmenes y otras propiedades en regiones tridimensionales. Se define como la integral iterada de una función f (x, y, z) sobre una región tridimensional DDD en el espacio.

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dV$$

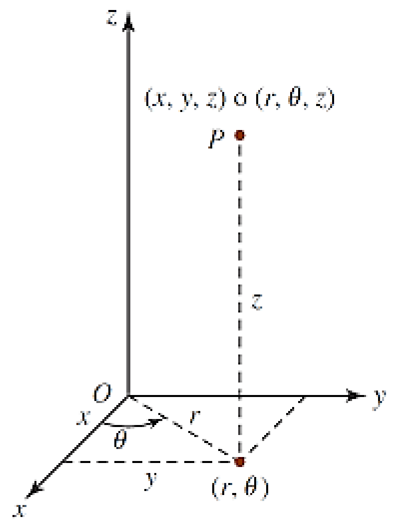
Aplicaciones de la integral triple

1. **Cálculo de volúmenes:** Como se mencionó, es útil para determinar volúmenes de regiones complicadas en 3D.
2. **Centro de masa:** Cuando f (x, y, z) es una densidad de masa, la integral triple se usa para encontrar el centro de masa de un cuerpo tridimensional.
3. **Momento de inercia:** Calcula cómo la masa de un objeto está distribuida respecto a un eje, útil en dinámica y mecánica.
4. **Flujo de fluidos:** En física, se utiliza para describir el flujo de un fluido o campo vectorial a través de una región en el espacio.
5. **Electrostática y gravitación:** Se emplea en campos de ingeniería para modelar distribuciones de carga o masa en el espacio.

5.6 Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas

Integral triple en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto en el espacio representan con (r, θ) a las coordenadas polares de la proyección del punto en el plano xy y z el valor de la coordenada en el eje z. Gráficamente, un punto $P(x, y, z)$ se puede representar como:



Vemos que, en el plano xy, (r, θ) son las coordenadas polares y z representa la altura del punto (x, y, z). Así, el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas es:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

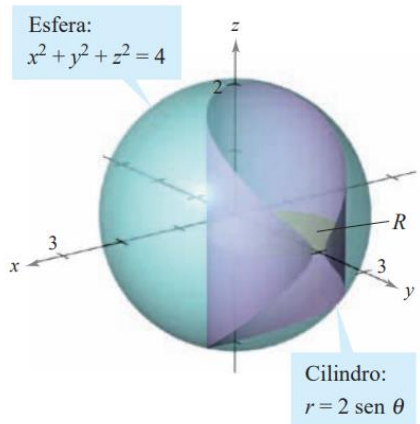
Además, es claro que $x^2 + y^2 = r^2$

Si una región S de $\mathbb{R}^3$ tiene un eje de simetría, las integrales triples son más fáciles de evaluar si se hace un cambio de coordenadas de cartesianas a cilíndricas. Sea $S = \{(r, \theta, z) : \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta), h_1(r, \theta) \leq z \leq h_2(r, \theta)\}$ la región de integración. Consideremos f una función continua en S de tres variables x, y, z, de modo que (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas del punto (x, y, z). Se calcula la integral triple de f sobre S como:

$$\iiint_S f(x, y, z)\ dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\ r dz dr d\theta.$$

Ejercicio de integral tripe en coordenadas cilíndricas

Halar el volumen de la región solida Q que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ el cilindro $r = 2\ \sin\theta$.



Solución. Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los limites o cotas de z son:

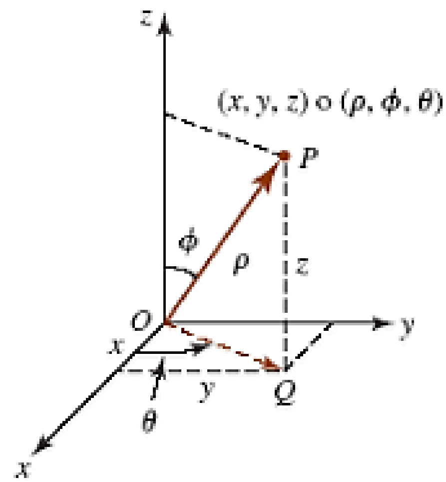
$$-\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Sea R la proyección circular del sólido sobre el plano $r\theta$. Entonces los límites o cotas de R son $0 \leq r \leq 2\,sin\,\theta$ y $0 \leq \theta \leq p$. Por tanto, el volumen de Q es:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} 2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big]_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}(8 - 8\cos^3\theta)\,d\theta \\
&= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}[1 - (\cos\theta)(1 - \text{sen}^2\,\theta)]\,d\theta \\
&= \frac{32}{3}\left[\theta - \text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}^3\,\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{16}{9}(3\pi - 4) \\
&\approx 9.644.
\end{aligned}$$

Integral triple en coordenadas esféricas

La representación de las coordenadas esféricas de un punto $P(x, y, z)$ es $(\rho, \theta, \emptyset)$, donde ρ es la distancia de P al origen, θ es el ángulo polar de la proyección del punto P en el plano xy y $\emptyset$ es la medida no negativa del ángulo menor medido desde la parte positiva del eje z a la recta que uno P con el origen. Tenemos entonces que el ángulo θ máximo es 2π y el ángulo $\emptyset$ máximo es π. Gráficamente, representamos las coordenadas cilíndricas como:



Con las notaciones dadas en la figura anterior, por coordenadas cilíndricas, tenemos que:

$$x = |\overline{OQ}| \cos\theta, \quad y = |\overline{OQ}| \sin\theta, \quad z = |\overline{QP}|.$$

Por el Teorema de Pitágoras, $|\overline{OQ}| = \rho \sin\phi$ y $|\overline{QP}| = \rho\cos\phi$.

Así, $$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

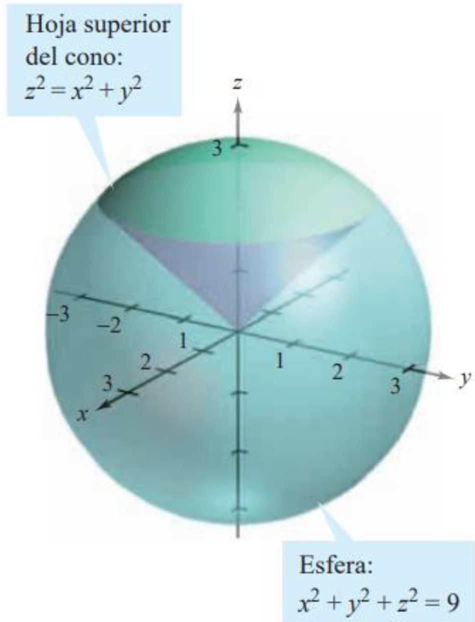
Además, es claro que $x^2 + y^2 + z^2 = p^2$

Ahora se procederá a definir la integral triple en coordenadas esféricas. Consideremos la región tridimensional S en coordenadas esféricas. Entonces:

$$\iiint_S f(x, y, z)\ dV = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi)\rho^2 \sin\phi\ d\rho d\theta d\phi.$$

Ejercicio y ejemplo de integral triple en coordenadas esféricas

Hallar el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.



Solución. En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3.$$

La esfera y el cono se cortan cuando:

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y, como $z = \rho \cos \emptyset$, se tiene que:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, se puede utilizar el orden de integración $d\rho\ d\emptyset\ d\theta$, donde $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El volumen es:

$$
\begin{aligned}
V = \iiint\limits_Q dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi} -\cos\phi\Big]_0^{\pi/4}\, d\theta \\
&= 9\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta = 9\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 16.563.
\end{aligned}
$$

5.7 Campos vectoriales

Un campo vectorial es una función que asigna un vector a cada punto en un espacio. Matemáticamente, se puede definir en el plano o en el espacio tridimensional como: En R 2 (plano): $F\ (x, y) = P\ (x, y)\ i + Q\ (x, y)\ j$, donde $P\ (x, y)$ y $Q\ (x, y)$ son funciones escalares y i, j son los vectores unitarios. En R 3 (espacio tridimensional): $F\ (x, y, z) = P\ (x, y, z)\ i + Q\ (x, y, z)\ j + R\ (x, y, z)\ k$, donde P, Q, R son funciones escalares y k es el vector unitario adicional.

Tipos de campos vectoriales

- Campos de gradiente (conservativos): Un campo es conservativo si se puede expresar como el gradiente de una función escalar $\phi\ (x, y, z)$ es decir:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right).$$

Ejemplo: El campo gravitacional cerca de la superficie terrestre es conservativo, dado por $F = -\ m\ gk$.

- Campos de flujo: Representan la velocidad de un fluido en movimiento. Cada vector indica la dirección y la magnitud de la velocidad en un punto.
  Ejemplo: El flujo de aire en la atmósfera o el flujo de agua en un río.
- Campos rotacionales: Tienen circulación no nula, lo que significa que presentan una tendencia a rotar alrededor de ciertos puntos.
  Ejemplo: Un campo magnético generado por una corriente eléctrica.
- Campos radiales: Sus vectores apuntan hacia (o desde) un punto central. Ejemplo: El campo eléctrico debido a una carga puntual, dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

Ejemplos de campos vectoriales

Campo gravitacional: Representa la fuerza de atracción gravitacional. En un campo uniforme cerca de la Tierra:

$F = -\ m\ g\ k$

Campo eléctrico: Para una carga puntual q:

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

Campo magnético: Generado por una corriente recta

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta},$$

donde θ^ es un vector unitario tangente a las líneas circulares del campo.

Campo de velocidad de un fluido: Representa la dirección y magnitud de las partículas del fluido en un punto, como:

$F\ (x, y) = -\ y\quad i + x\quad j.$

Campo de temperatura (no vectorial, pero relacionado): Aunque es un campo escalar, se usa en conjunto con campos vectoriales para modelar fenómenos como el flujo de calor (dado por el gradiente de la temperatura).

Aplicaciones de los campos vectoriales

1. **Física:**

   Modelar fuerzas (gravitacional, eléctrica, magnética).

2. **Ingeniería:**

   Flujo de fluidos, análisis de estructuras.

3. **Matemáticas:**

   Resolución de ecuaciones diferenciales vectoriales.

4. **Meteorología:**

   Describir corrientes de aire y mapas de viento.

5.8 La integral lineal

Definición de integral de línea de campos escalares

Sea $\bar{\alpha}: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ un camino regular a trozos, y sea $C = \{\bar{\alpha}(t): t \in [a, b]\}$ la curva descrita por $\bar{\alpha}$. Sea $\varphi: C \to \mathbb{R}$ un campo escalar acotado. La integral de linea de φa lo largo de C se representa:

$$\int_C \varphi \, ds$$

Y se define por:

$$\int_C \varphi \, ds = \int_a^b \varphi(\overline{\alpha}(t)) \left\| \overline{\alpha}'(t) \right\| \, dt,$$

Siempre que la integral del segundo miembro exista, bien como integral propia o como integral impropia.

Definición de integral de línea de campos vectoriales

Sea $\bar{\alpha}$ un camino regular a trozos en $\mathbb{R}^p$, definido en $[a, b]$. Sea $\bar{f}$ un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica C de $\bar{\alpha}$. La integral de linea de $\bar{f}$ a lo largo de C se representa:

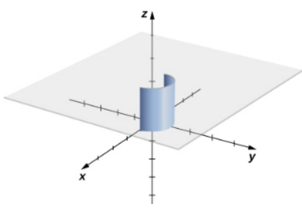
$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} \qquad ó \qquad \int_C \overline{f} \cdot ds$$

Y se define por:

$$\int_C \overline{f} \cdot d\overline{\alpha} = \int_a^b \overline{f}(\overline{\alpha}(t)) \cdot \overline{\alpha}'(t)\, dt,$$

Siempre que la integral del segundo miembro (en cuyo integrado ≪·≫ denota el producto escalar de $\mathbb{R}^p$) exista, bien como integral propia o integral impropia.

Ejercicio de integral de línea



Halle el valor de la integral $\int_C 2ds,$ donde C es la mitad superior del círculo unitario.

Imagen 1 La hoja que está formada por la mitad superior del círculo unitario en un plano y el gráfico de f(x,y)=2.

Solución. La figura muestra el grafico de $f(x, y) = 2$, curva C, y la hoja formada por ellos. Observe que esta hoja tiene la misma superficie que un rectángulo con anchura π y longitud 2. Por lo tanto:

$$\int_C \mathbf{2ds = 2\pi}$$

Para ver que, $\int_C 2ds = 2\pi$ utilizando la definición de integral de línea, dejamos que $r(t)$ sea una parametrización de C. Entonces, $f(r(t_i)) = 2$ para cualquier número t_i en el dominio de r. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f\left(\mathbf{r}\left(t_i^*\right)\right) \Delta s_i \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n 2\Delta s_i \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i \\ &= 2\,(\text{longitud de C}) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

5.9 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física.

La divergencia y el rotacional son conceptos fundamentales en el cálculo vectorial, especialmente en el contexto de campos vectoriales. Ambos tienen interpretaciones geométricas y físicas que son cruciales para entender fenómenos en electromagnetismo, mecánica de fluidos y otros campos de la física.

Divergencia:

La divergencia de un campo vectorial mide la tasa a la cual "fluye" el campo desde un punto dado. Se define matemáticamente como:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

donde F= (P, Q, R) es un campo vectorial en tres dimensiones. La divergencia es una escala que puede interpretarse como la diferencia entre el flujo entrante y saliente a través de una superficie cerrada que contiene un volumen infinitesimal d V.

Interpretación Geométrica:

Flujo Saliente: Una divergencia positiva indica que el campo emana desde un punto, actuando como una fuente.

Flujo Entrante: Una divergencia negativa sugiere que el campo converge hacia un punto, actuando como un sumidero.

Divergencia Nula: Indica que no hay fuentes ni sumideros en la región, lo que significa que el flujo es constante a lo largo del espacio.

Rotacional:

El rotacional de un campo vectorial describe la tendencia de las líneas de campo a "girar" alrededor de un punto. Se define como:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$$

El resultado es otro campo vectorial que representa la magnitud y dirección del giro en torno a un punto específico.

Interpretación Geométrica:

Dirección del Giro: La dirección del rotacional se determina mediante la regla de la mano derecha, donde los dedos apuntan en la dirección del giro y el pulgar indica la dirección del vector rotacional.

Rotación Cero: Un rotacional igual a cero implica que no hay rotación en esa región; las líneas de campo son rectas o paralelas.

Aplicaciones Físicas

Electromagnetismo: En electromagnetismo, la divergencia del campo eléctrico está relacionada con la densidad de carga, mientras que el rotacional del campo magnético está relacionado con las corrientes eléctricas.

Mecánica de Fluidos: En fluidos, la divergencia puede indicar si un fluido se está expandiendo o contrayendo, mientras que el rotacional puede describir patrones de vorticidad dentro del fluido.

Teoría de Campos: Ambos conceptos son esenciales para formular las ecuaciones de Maxwell y otras teorías físicas que describen cómo interactúan los campos con la materia.

Problema: Calcular la divergencia del campo vectorial $\boldsymbol{f = x^2, y^2, z^2}$

Definición de la Divergencia:

La divergencia de un campo vectorial F=(P,Q,R) se define como:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Aplicación a nuestro campo:

$$P = x^2$$
$$Q = y^2$$
$$R = z^2$$

Cálculo de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial (y^2)}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (z^2)}{\partial z} = 2z$$

Sustitución en la fórmula de divergencia:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2x + 2y + 2z$$

Por lo tanto, la divergencia del campo vectorial es:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2(x + y + z)$$

Problema: Calcular el rotacional del campo vectorial F=(yz,xz,xy).

Definición del Rotacional:

El rotacional de un campo vectorial F=(P,Q,R) se define como:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Identificación de componentes:

$$P = yz$$
$$Q = xz$$
$$R = xy$$

Cálculo del determinante:

Al calcular el determinante, obtenemos:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(0-0) - \hat{\jmath}\,(0-0) + \hat{k}\,(x-y)$$

Resultado Final:

Por lo tanto, el rotacional del campo vectorial es:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, x-y)$$

5.10 Teoremas de integrales.

Los teoremas de integrales son principios fundamentales en el cálculo integral que describen las propiedades y aplicaciones de las integrales.

Teorema Fundamental del Cálculo

Este teorema conecta las operaciones de derivación e integración y se divide en dos partes:

Primera Parte: Afirma que si una función f es continua en un intervalo [a, b], entonces la integral de f desde a hasta b se puede encontrar evaluando una función antiderivada de f en los extremos a y b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f.

Segunda Parte: Establece que si F(x) es una función definida como la integral de f(t) desde un punto fijo aa hasta x, entonces F es diferenciable y su derivada es f:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

2. Teorema de la Integral de Sustitución

También conocido como el Teorema de Cambio de Variable. Este teorema permite simplificar el cálculo de integrales utilizando una sustitución adecuada:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

Aquí, gg es una función diferenciable y u=g(x)u = g(x).

3. Teorema de la Integral por Partes

Este teorema es útil para integrar productos de funciones. Se expresa como:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

donde u y v son funciones diferenciables.

Aplicaciones

Teorema Fundamental del Cálculo: Se utiliza para calcular integrales definidas de manera más eficiente, encontrando una función antiderivada en lugar de sumar infinitesimales.

Teorema de la Integral de Sustitución: Simplifica integrales complicadas al cambiar la variable de integración.

Teorema de la Integral por Partes: Ayuda a encontrar la integral de productos de funciones, especialmente útil en física y en problemas de ingeniería.

Estos teoremas son herramientas fundamentales en el cálculo que permiten resolver una amplia variedad de problemas matemáticos y aplicados en diferentes campos como la física, la ingeniería, y la economía.

El teorema fundamental de las integrales de línea es una extensión del teorema fundamental del cálculo, aplicado a campos vectoriales. Este teorema es una herramienta poderosa en el cálculo multivariable y se usa para evaluar integrales de línea de campos vectoriales conservativos.

Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

Definición

Sea F un campo vectorial conservativo en una región abierta D de R^n y ϕ una función escalar tal que F=∇ϕ (donde ∇ϕ es el gradiente de ϕ). Si C es una curva suave desde a hasta b en D, entonces:

$$\int_C F \cdot dr = \phi(b) - \phi(a)$$

Interpretación

Interpretación

Esto significa que la integral de línea de un campo vectorial conservativo a lo largo de una curva solo depende de los valores de la función potencial ϕ en los extremos de la curva. En otras palabras, la integral de línea de F desde a hasta b es igual al cambio en la función potencial ϕ entre esos dos puntos.

Aplicaciones

Física: En física, este teorema es fundamental para trabajar con campos de fuerza conservativos, como los campos gravitacionales y eléctricos. Permite calcular el trabajo realizado por una fuerza en un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria.

Ingeniería: En ingeniería, se usa para analizar sistemas donde la energía potencial cambia a lo largo de un camino específico.

Matemáticas: En matemáticas, este teorema simplifica el cálculo de integrales de línea de campos vectoriales conservativos, evitando la necesidad de parametrizar la curva.

Ejemplo

Considera el campo vectorial F(x,y)=(y,x) y la curva C que va desde (0, 0) hasta (1, 1). Primero, encontramos la función potencial ϕ.

Sabemos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x$$

Integrando $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ con respecto a x, obtenemos:

$$\phi(x, y) = xy + g(y)$$

Ahora, derivamos ϕ(x,y)=xy+g con respecto a y para igualarlo a x:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + g(y)) = x + g'(y) = x$$

De esto, deducimos que g′(y)=0, entonces g(y) es una constante que podemos asumir como cero para simplicidad:

$$\phi(x, y) = xy$$

Entonces, aplicando el teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C F \cdot dr = \phi(1,1) - \phi(0,0) = (1)(1) - (0)(0) = 1$$

Conclusión

El estudio de las integrales en sus diversas formas y aplicaciones permite una comprensión profunda de fenómenos geométricos, físicos y matemáticos. A través del análisis de áreas e integrales dobles, iteradas y triples en coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas, se evidencia la capacidad del cálculo integral para adaptarse a diferentes contextos y resolver problemas complejos con precisión y eficiencia.

Por otra parte, la exploración de los campos vectoriales, junto con conceptos como la integral de línea, la divergencia y el rotacional, refuerza el entendimiento de magnitudes dinámicas en el espacio. Estas herramientas, combinadas con los teoremas fundamentales del cálculo vectorial, ofrecen un marco poderoso para modelar y analizar sistemas físicos y matemáticos, desde la mecánica de fluidos hasta el electromagnetismo.

En conjunto, los temas abordados destacan la importancia de las integrales como un puente entre la teoría matemática y su aplicación práctica, subrayando su papel esencial en el desarrollo de soluciones innovadoras en ciencia e ingeniería. Este recorrido reafirma el valor del cálculo como un lenguaje universal para describir y comprender el mundo que nos rodea.

Referencias

Paniagua, R., Casteleiro, J. M. (2002). Cálculo Integral. España: ESIC Editorial.

LARSON, RON / EDWARDS, BRUCE. (2010). Calculo 2 de varias variables (9.a ed.). MCGRAW HILL.

https://lc.fie.umich.mx/~rochoa/Materias/CALCULO/CALCULO_2/LARSON.pdf

https://blog.nekomath.com/calculo-diferencial-e-integral-iii-divergencia-laplaciano-y-rotacional/

https://quintans.webs.uvigo.es/recursos/Web_electromagnetismo/magnetismo_rotacionalydivergencia.htm

https://www.studocu.com/es-mx/document/instituto-tecnologico-superior-de-acayucan/calculo-vectorial/divergencia-rotacional-i-fisica-y-geometrica/86559602

https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-1/pages/5-3-el-teorema-fundamental-del-calculo

https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2020/analisis_II/Apunte-GSG-Paternostro-Rossi.pdf

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_gradiente

https://espanol.libretexts.org/Matematicas/Libro%3A_Calculo_(OpenStax)/15%3A_Integraci%C3%B3n_m%C3%BAltiple/15.05%3A_Integrales_triples_en_coordenadas_cil%C3%ADndricas_y_esf%C3%A9ricas

https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/6-1-campos-vectoriales

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CÁLCULO VECTORIAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO (A): CHONTAL OBIL OSIRIS MONSERRAT		Problemario de la Unidad: 5
PERIODO: AGOSTO-DICIEMBRE 2024	GRUPO: 301 A	FECHA DE ENTREGA: 8/12/2024
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	
5 %	**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	√		
5 %	**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno	√		
30 %	**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.	√		
5 %	**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades	√		
5 %	**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha señalada.	√		
50 %	**CALIFICACIÓN**	50%		

INSTITUTO TECNOLOGICO SUPERIOR

DE SAN ANDRES TUXTLA, VER.

ING. INDUSTRIAL

CALCULO VECTORIAL

3ER SEMESTRE

GRUPO: 301 A

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO

PROBLEMARIO UNIDAD 5

ALUMNOS:

OSIRIS MONSERRAT CHONTAL OBIL

JESSICA DEL CARMEN XALA FISCAL

GENESIS JOHANNA CHAGALA JIMENEZ

CRISTIAN DE JESUS BONOLA ALFONSO

INTEGRALES DOBLES

1. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\, dy\, dx$

$= \int_1^4 \left(\int_0^2 6x^2y\, dy - \int_0^2 2x\, dy \right) dx$

$= \int_1^4 \left(6x^2 \int_0^2 y\, dy - 2x \int_0^2 dy \right) dx$

$= \int_1^4 \left(6x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^2 \right) - 2x \left(y \Big|_0^2 \right) \right) dx = \int_1^4 \left(6x^2 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - 2x(2-0) \right) dx$

$= \int_1^4 (6x^2(2) - 2x(2))\, dx = \int_1^4 (12x^2 - 4x)\, dx = \int_1^4 12x^2\, dx - \int_1^4 4x\, dx$

$= 12 \int_1^4 x^2\, dx - 4 \int_1^4 x\, dx = 12 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_1^4 \right) - 4 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \right) = 12 \left(\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right)$

$= 12 \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) - 4 \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2} \right) = 12 \left(\frac{63}{3} \right) - 4 \left(\frac{15}{2} \right) = 4(63) - 2(15)$

$= 252 - 30 = \boxed{222}$

$\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_1^4 (6x^2y - 2x)\, dx\, dy$

$= \int_0^2 \left(6y \left(\frac{x^3}{3} \Big|_1^4 \right) - 2 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \right) \right) dy = \int_0^2 \left(6y \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) - 2 \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) dy$

$= \int_0^2 \left(6y \left(\frac{63}{3} \right) - 2 \left(\frac{15}{2} \right) \right) dy = \int_0^2 (126y - 15)\, dy = 126 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^2 \right) - 15 \left(y \Big|_0^2 \right)$

$= 126 \left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2} \right) - 15(2-0) = 126(2) - 15(2)$

$= 252 - 30 = \boxed{222}$

Escaneado con CamScanner

② $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \left(\int_1^2 4x^3 dy - \int_1^2 9x^2y^2 dy \right) dx$

$= \int_0^1 \left(4x^3 \int_1^2 dy - 9x^2 \int_1^2 y^2 dy \right) dx$

$= \int_0^1 \left(\left(4x^3 \left(y\Big|_1^2\right)\right) - 9x^2 \left(\frac{y^3}{3}\Big|_1^2 \right) \right) dx = \int_0^1 \left(4x^3(2-1) - 9x^2\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) dx$

$= \int_0^1 \left(4x^3(1) - 9x^2\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) dx = \int_0^1 \left(4x^3 - 9x^2\left(\frac{7}{3}\right)\right) dx$

$= \int_0^1 (4x^3 - 21x^2)\,dx = 4\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) - 21\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = 4\left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) - 21\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$

$= 4\left(\frac{1}{4}\right) - 21\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - 7 = \boxed{-6}$

$\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dx\,dx = \int_1^2 \int_0^1 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dx\,dy$

$= \int_1^2 \left(4\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) - 9y^2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)\right) dy = \int_1^2 \left(4\left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) - 9y^2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)\right) dy$

$= \int_1^2 \left(4\left(\frac{1}{4}\right) - 9y^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) dy = \int_1^2 (1 - 3y^2)\,dy = y\Big|_1^2 - 3\left(\frac{y^3}{3}\Big|_1^2\right)$

$= (2-1) - 3\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 1 - 3\left(\frac{7}{3}\right) = 1 - 7 = \boxed{-6}$

FIRST CLASS

Integrales Dobles

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x-y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\left(-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x-y)(-dy)\right)dx$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen} v\,dv = -\cos v}$$

$v = x-y$

$dv = -dy$

$$= \int_0^{\pi/2} -\left(-\cos(x-y)\Big|_{y=0}^{\pi/2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} -\left(-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x-0)\right)dx$$

$$\boxed{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} -(-\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$$

$$\boxed{\int \cos v\,dv = \operatorname{sen} v}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx - \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}(0) = -0+1-1+0 = \underline{0}\,//$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 0 = 1 \\ \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}}$$

Integral triple

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_y^{3+y^2} 4x\,dz\,dy\,dx = \underline{\frac{232}{15}} \quad R/.$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left\{ \int_{y=0}^{y=2-x} \left[\int_{z=y}^{z=3+y^2} 4x\,dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left\{ \int_{y=0}^{y=2-x} \left[4xz \Big|_{z=y}^{z=3+y^2} \right] dy \right\} dx = \int_{x=0}^{x=2} \Big\{ \cdots$$

$$\left\{ \int_{y=0}^{y=2-x} 4x\cdot(3+y^2-y)\,dy \right\} dx = \cdots$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left\{ 4x\cdot\left(3y+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right) \Big|_{y=0}^{y=2-x} \right\} dx = \cdots$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left\{ 4x\left[3(2-x)+\frac{1}{3}(2-x)^3-\frac{1}{2}(2-x)^2\right] \right\} dx = \cdots$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} 4x\cdot\left[6-3x+\frac{1}{3}(8-12x+6x^2-x^3)-\frac{1}{2}(4-4x+x^2)\right] dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} 4x\left[6-3x+\frac{8}{3}-4x+2x^2-\frac{1}{3}x^3-2+2x-\frac{1}{2}x^2\right] dx = \cdots$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} 4x\left(\frac{20}{3}-5x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{80}{3}x-20x^2+6x^3-\frac{4}{3}x^4\right) dx = \frac{\cancel{80}^{\,40}}{3}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}_{\,1}}-20\cdot\frac{x^3}{3}+\cancel{6}^{\,3}\frac{x^4}{\cancel{4}_{\,2}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \frac{40}{3}x^2-\frac{20}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{15}x^5\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{40}{3}(2)^2-\frac{20}{3}(2)^3+\frac{3}{2}(2)^4-\frac{4}{15}(2)^5 = \cdots$$

$$= \frac{160}{3}-\frac{160}{3}+24-\frac{128}{15} = \frac{24}{1}-\frac{128}{15} = \frac{360-128}{15} = \frac{359-127}{15} = \underline{\frac{232}{15}} \approx 15,47$$

EJEMPLO RESUELTO INTEGRAL TRIPLE

$$\int_2^3 \int_0^{2x} \int_1^{x^2+y^2+2} xy\,dz\,dy\,dx = \int_{x=2}^{x=3} \left\{ \int_{y=0}^{y=2x} \left[\int_{z=1}^{z=x^2+y^2+2} xy\,dz \right] dy \right\} dx = \ldots$$

$$\ldots = \int_{x=2}^{x=3} \left\{ \int_{y=0}^{y=2x} \left[xyz \Big|_{z=1}^{z=x^2+y^2+2} \right] dy \right\} dx = \int_{x=2}^{x=3} \left\{ \int_{y=0}^{y=2x} \left[xy(x^2+y^2+1) \right] dy \right\} dx \ldots$$

$$\ldots = \int_{x=2}^{x=3} \left[\int_{y=0}^{y=2x} (x^3y + xy^3 + xy)\,dy \right] dx = \int_{x=2}^{x=3} \left[x^3\frac{y^2}{2} + \frac{xy^4}{4} + \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2x} \right] dx \ldots$$

$$\ldots = \int_{x=2}^{x=3} \left[x^3 \cdot \frac{(2x)^2}{2} + \frac{x(2x)^4}{4} + \frac{x(2x)^2}{2} \right] dx = \int_{x=2}^{x=3} \left[x^3 \cdot \frac{4x^2}{2} + x \cdot \frac{16x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} \right] dx \ldots$$

$$\ldots = \int_{x=2}^{x=3} (2x^5 + 4x^5 + 2x^3)\,dx = \int_{x=2}^{x=3} (6x^5 + 2x^3)\,dx = \frac{6x^6}{6} + \frac{2x^4}{4} \Big|_{x=2}^{x=3} = x^6 + \frac{1}{2}x^4 \Big|_{x=2}^{x=3} = \ldots$$

$$\ldots = \left[(3)^6 + \tfrac{1}{2}(3)^4 \right] - \left[(2)^6 + \tfrac{1}{2}(2)^4 \right] = 729 + \tfrac{81}{2} - 64 - 8 = 657 + \tfrac{81}{2} = \frac{1314 + 81}{2} = \frac{1395}{2} \quad //$$

Integrales Triples

$$\int_0^2\int_0^{2-y}\int_0^{x+y}(x-y+2z)\,dz\,dx\,dy=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\int_{x=0}^{x=2-y}\left[\int_{z=0}^{z=x+y}(x-y+2z)\,dz\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\,dx\right\}dy=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\int_{x=0}^{x=2-y}\left[(x-y)z+\cancel{2}\frac{z^2}{\cancel{2}}\bigg|_{z=0}^{z=x+y}\right]dx\right\}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\int_{x=0}^{x=2-y}\left[(x-y)(x+y)+(x+y)^2\right]dx\right\}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\int_{x=0}^{x=2-y}(x^2-y^2+x^2+2xy+y^2)\,dx\right\}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\int_{x=0}^{x=2-y}(2x^2+2xy)\,dx\right\}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left\{2\frac{x^3}{3}+\cancel{2}\cdot y\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\bigg|_{x=0}^{x=2-y}\right\}dy=\int_{y=0}^{y=2}\left\{\frac{2}{3}(2-y)^3+y(2-y)^2\right\}dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left[\frac{2}{3}(2^3-3\cdot2^2\cdot y+3\cdot2\cdot y^2-y^3)+y(2^2-2\cdot2\cdot y+y^2)\right]dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left(\frac{16}{3}-8y+\cancel{4y^2}-\frac{2}{3}y^3+4y-\cancel{4y^2}+y^3\right)dy$$

$$=\int_{y=0}^{y=2}\left(\frac{16}{3}-4y+\frac{1}{3}y^3\right)dy=\frac{16}{3}y-\frac{4y^2}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\bigg|_{y=0}^{y=2}$$

$$=\frac{16}{3}y-2y^2+\frac{1}{12}y^4\bigg|_{y=0}^{y=2}=\frac{16}{3}(2)-2(2)^2+\frac{1}{12}(2)^4=\frac{32}{3}-8+\frac{\cancel{16}^{\,4}}{\cancel{12}_{\,3}}$$

$$=\frac{32}{3}-8+\frac{4}{3}=\frac{36}{3}-8=12-8=\underline{4}\,/\!/$$

Escaneado con CamScanner