METODOS CUATITATIVOS PARA ADMINISTRACION.

TRABAJO DE INVESTIGACION 4

TEORÍA DE COLAS

La teoría de colas, también conocida como teoría de líneas de espera, es una disciplina matemática que estudia el comportamiento de las filas o colas en sistemas donde los recursos son limitados. Esta teoría se utiliza para analizar y optimizar el flujo de clientes, procesos o tareas en diversos contextos, desde servicios al cliente hasta sistemas de producción y logística.

¿QUÉ ES LA TEORÍA DE COLAS?

La teoría de colas se enfoca en modelar y analizar sistemas donde los clientes, tareas o entidades compiten por recursos limitados. Estos sistemas suelen involucrar dos elementos principales:

- **Clientes:** Las entidades que llegan al sistema y requieren un servicio (por ejemplo, personas, vehículos, paquetes, etc.).
- **Servidores:** Los recursos que atienden a los clientes (por ejemplo, cajeros, máquinas, estaciones de trabajo, etc.).

El objetivo de la teoría de colas es optimizar el sistema para minimizar el tiempo de espera, reducir costos y mejorar la eficiencia. Para ello, se utilizan modelos matemáticos que consideran factores como la tasa de llegada de clientes, la tasa de servicio, el número de servidores y la disciplina de la cola (por ejemplo, "primero en entrar, primero en salir").

ESTRUCTURA BÁSICA DE LOS MODELOS DE LÍNEA DE ESPERA

Un modelo de línea de espera se compone de varios elementos fundamentales que describen el comportamiento del sistema:

1. FUENTE DE ENTRADA (CLIENTES)

Es el conjunto de entidades que llegan al sistema para recibir un servicio. La fuente puede ser finita o infinita. En muchos modelos, se asume una fuente infinita, donde la llegada de nuevos clientes no depende del número de clientes en el sistema.

2. PROCESO DE LLEGADA

Describe cómo y cuándo los clientes llegan al sistema. Comúnmente, se modela mediante una distribución de Poisson, donde los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial.

3. COLA

Es el lugar donde los clientes esperan antes de ser atendidos. La longitud de la cola puede ser finita o infinita, y su comportamiento depende de la disciplina de la cola y de la capacidad del sistema.

4. DISCIPLINA DE LA COLA

Determina el orden en que los clientes son atendidos. Las disciplinas más comunes son:

- **FIFO (First In, First Out):** El primero en llegar es el primero en ser atendido.
- **LIFO (Last In, First Out):** El último en llegar es el primero en ser atendido.
- **SIRO (Service In Random Order):** El orden de servicio es aleatorio.
- **Prioridades:** Los clientes con mayor prioridad son atendidos antes.

5. PROCESO DE SERVICIO

Describe el tiempo que tarda un servidor en atender a un cliente. A menudo, se modela mediante una distribución exponencial, aunque también se pueden utilizar otras distribuciones dependiendo del contexto.

6. NÚMERO DE SERVIDORES

Indica cuántos servidores están disponibles para atender a los clientes. Puede haber un solo servidor (sistema monocanal) o múltiples servidores (sistema multicanal).

7. CAPACIDAD DEL SISTEMA

Es el número máximo de clientes que pueden estar en el sistema (en espera o siendo atendidos). Puede ser finita o infinita.

NOTACIÓN DE KENDALL

La notación de Kendall es una forma estándar de describir modelos de colas y se representa como A/S/c/K/N/D, donde:

- **A:** Distribución del tiempo entre llegadas.

- **S:** Distribución del tiempo de servicio.
- **c:** Número de servidores.
- **K:** Capacidad máxima del sistema.
- **N:** Tamaño de la población.
- **D:** Disciplina de la cola.

Por ejemplo, un modelo M/M/1 representa un sistema con llegadas y servicios de tipo Markoviano (exponencial) y un solo servidor.

📊 MEDIDAS DE RENDIMIENTO

Las principales métricas para evaluar el desempeño de un sistema de colas incluyen:

- **λ (lambda):** Tasa promedio de llegadas.
- **μ (mu):** Tasa promedio de servicio.
- **ρ (rho):** Factor de utilización del sistema, calculado como $\rho = \lambda / (c * \mu)$, donde c es el número de servidores.
- **L:** Número promedio de clientes en el sistema.
- **Lq:** Número promedio de clientes en la cola.
- **W:** Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema.
- **Wq:** Tiempo promedio que un cliente espera en la cola.

Estas métricas permiten analizar y optimizar el rendimiento del sistema.

MODELOS CLÁSICOS DE LÍNEAS DE ESPERA

1. MODELO M/M/1

- **Características:**
  - Llegadas y servicios siguen una distribución exponencial.
  - Un solo servidor.
  - Capacidad infinita.

- Disciplina FIFO.

- **Aplicaciones:** Sistemas de atención al cliente con un único punto de servicio, como una ventanilla bancaria.

2. MODELO M/M/C

- **Características:**
  - Llegadas y servicios siguen una distribución exponencial.
  - c servidores en paralelo.
  - Capacidad infinita.
  - Disciplina FIFO.
- **Aplicaciones:** Centros de llamadas con múltiples operadores.

3. MODELO M/G/1

- **Características:**
  - Llegadas siguen una distribución exponencial.
  - Tiempo de servicio con distribución general.
  - Un solo servidor.
  - Disciplina FIFO.
- **Aplicaciones:** Sistemas donde el tiempo de servicio varía significativamente, como servicios de reparación.

APLICACIONES PRÁCTICAS

Los modelos de líneas de espera se aplican en diversos contextos para mejorar la eficiencia y la satisfacción del cliente:

- **Bancos:** Optimización del número de cajeros para reducir tiempos de espera.
- **Hospitales:** Gestión de salas de emergencia y programación de cirugías.

- **Sistemas de manufactura:** Gestión de líneas de producción y mantenimiento de maquinaria.
- **Telecomunicaciones:** Gestión del tráfico de datos y llamadas.

EJEMPLOS DETALLADOS DE MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA

EJEMPLO DE MODELO M/M/1

Contexto: Un cajero en una sucursal bancaria

- **Características del sistema:**
  - Tasa de llegada de clientes (λ): 10 clientes por hora.
  - Tasa de servicio del cajero (μ): 12 clientes por hora.
  - Un solo servidor.
  - Tiempo entre llegadas y de servicio: distribución exponencial.
  - Capacidad infinita y disciplina FIFO.
- **Aplicación:**
  - Se utiliza este modelo para determinar cuánto tiempo esperará un cliente promedio.
  - Permite calcular la probabilidad de que haya una fila de cierto tamaño.
  - Se puede analizar si contratar un segundo cajero reduce significativamente el tiempo de espera.
- **Resultado esperado:**
  - Tiempo promedio en el sistema (W): –6 minutos.
  - Número promedio en la fila (Lq): –5 clientes.

EJEMPLO DE MODELO M/M/C

Contexto: Centro de atención telefónica (call center)

- **Características del sistema:**
  - λ: 120 llamadas por hora.
  - μ: 30 llamadas atendidas por cada operador por hora.
  - c: 5 operadores.
  - Distribuciones de llegada y servicio: exponenciales.
- **Aplicación:**
  - Se modela el sistema para prever cuánto deben esperar los clientes para ser atendidos.
  - Se evalúa el nivel de servicio, por ejemplo, que el 80% de las llamadas se atiendan en menos de 20 segundos.
- **Resultado esperado:**
  - Si ρ (utilización) se acerca mucho a 1, se necesitarían más operadores.
  - Se puede optimizar el número de agentes contratados en función del costo y el nivel de servicio.

EJEMPLO DE MODELO M/G/1

Contexto: Taller de reparación de computadoras

- **Características del sistema:**
  - λ: 4 clientes por hora.
  - Tiempo de servicio con una distribución general (por ejemplo, normal o uniforme), no necesariamente exponencial.
  - Un solo técnico (servidor).
- **Aplicación:**

- Aquí se modelan variaciones significativas en el tiempo de reparación (puede durar 10 minutos o hasta 2 horas).
- Este modelo es útil cuando la variabilidad del servicio es alta y no puede simplificarse con una distribución exponencial.

- **Resultado esperado:**
  - Permite estimar tiempos de espera más realistas considerando la variabilidad del servicio.
  - Aporta herramientas para decidir si conviene entrenar más personal o ajustar la agenda del técnico.

EJEMPLO DE MODELO M/M/1/K (CAPACIDAD FINITA)

Contexto: Estacionamiento con capacidad limitada

- **Características del sistema:**
  - λ: 20 autos por hora.
  - μ: 25 autos pueden salir por hora.
  - $c = 1$ (una entrada/salida).
  - $K = 30$ lugares de estacionamiento.
- **Aplicación:**
  - Permite estimar la probabilidad de que un auto llegue y no haya lugar disponible.
  - Se usa para justificar la expansión del estacionamiento o el cobro de tarifas diferenciales.
- **Resultado esperado:**
  - Probabilidad de rechazo: si el estacionamiento se llena un 15% del tiempo, puede evaluarse una política de reservas o expansión.

EJEMPLO DE MODELO M/M/∞ (SERVIDORES INFINITOS)

Contexto: Servidor de descargas en la nube

- **Características del sistema:**
  - λ: 500 solicitudes por minuto.
  - μ: cada descarga se sirve en 1 minuto.
  - Número de servidores: ∞ (cada solicitud es atendida de inmediato sin espera).
- **Aplicación:**
  - Se utiliza en sistemas donde no se permite el tiempo de espera, como servicios premium de streaming o descargas.
  - No hay cola, solo un análisis de utilización del sistema y costos asociados.
- **Resultado esperado:**
  - No hay espera ni rechazo.
  - El enfoque está en el uso de recursos y en dimensionar la infraestructura (cloud computing, ancho de banda, etc.).

EJEMPLO DE MODELO CON PRIORIDADES

Contexto: Sala de emergencias de un hospital

- **Características del sistema:**
  - Los pacientes llegan con diferentes niveles de gravedad.
  - Los casos críticos tienen prioridad sobre los menos urgentes.
  - Varios médicos (c servidores).
- **Aplicación:**
  - Permite implementar triage o clasificación de pacientes.

- Se modelan diferentes tiempos de espera por nivel de prioridad.
- Evalúa el impacto en la atención de urgencias y los recursos necesarios.

- **Resultado esperado:**
  - Mejora en la atención de pacientes críticos.
  - Justificación para más personal médico o protocolos de atención rápida.

🧠 REFLEXIÓN FINAL

Los modelos de línea de espera permiten **simular escenarios del mundo real**, prever tiempos de espera, y tomar decisiones operativas y estratégicas fundamentadas. Son ampliamente usados en:

- Servicios de salud
- Banca y finanzas
- Manufactura
- Logística
- Tecnología (cloud, streaming, telecomunicaciones)
- Sector público (trámites, justicia, educación)

📚 BIBLIOGRAFÍA

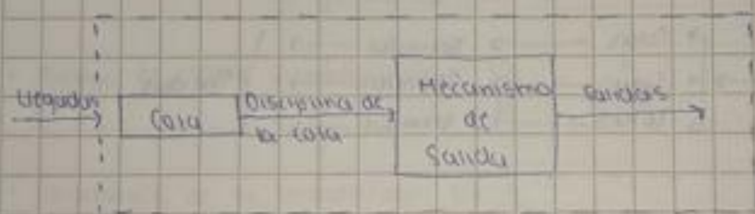
- **Teoría de colas: qué es, historia, modelos, para qué sirve, ejemplos:** https://www.lifeder.com/teoria-colas/lifeder.com
- **Estructura básica de los modelos de líneas de espera - MarcoTeorico.com:** https://www.marcoteorico.com/curso/87/matematicas-para-la-toma-de-decisiones/708/estructura-basica-de-los-modelos-de-lineas-de-esperamarcoteorico.com
- **Teoría de colas - Estadística.net:** https://www.estadistica.net/IO/7-1-TEORIA-

PROBLEMARIO 4

▸ Línea de Espera

31 03 25

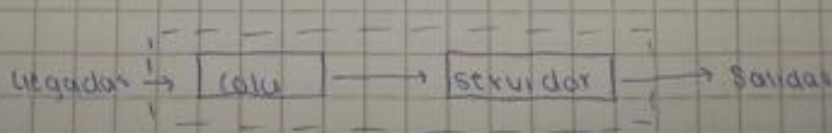
Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia, la cola y la instalación de servicios. Las llegadas son las unidades que entran en el sistema para recibir el servicio. Siempre se unen primero a la cola, si no hay línea de espera se dice que la cola está vacía. De la cola, la llegada va a la instalación de servicio de acuerdo con la disciplina de la cola, es decir, de acuerdo con la regla para decidir cuál de la llegada se sirve después. El primero en llegar primero en ser servido. Una vez que se completa el servicio, la llegada se convierte en salida.



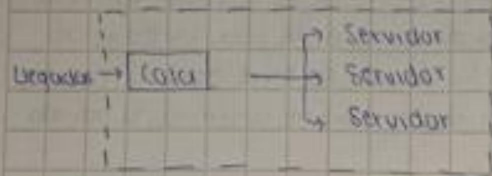
Situación	Llegada	Cola	Mecanismo de Servicio
- Panadería	Clientes	Cliente con #	Vendedor
- Hospital	Pacientes	Person Enferm.	Hospital
- Ofic. Correos	Cartas	Buzón	Empleados de correos
- Lav. carros	Autos	Auto sucio	Mecanismo de lavado

▸ Tipos de colas

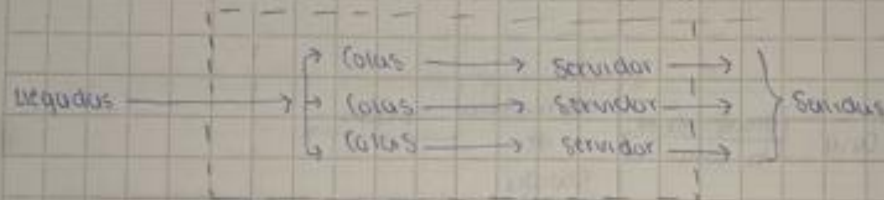
1) Sistema de un servidor y una cola. Puede describir un lavado de autos automáticos o un muelle de descarga de un solo lugar.



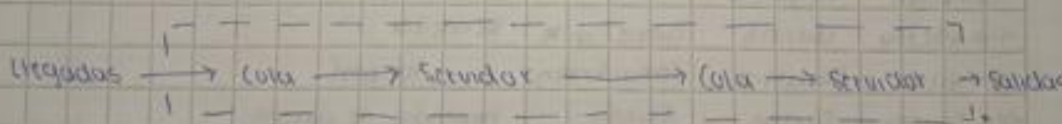
2) Una linea con multiple servidores, es tipico de una peluqueria o una panaderia donde los clientes toman un número al entrar y se les sirve cuando llega el turno.



3) Varias lineas, múltiples servidores, cada servidor tiene una linea separada es caracteristico de los bancos y tiendas de autoservicio.



4) Una linea con servidores en serie, puede describir una fabrica



▸ Teoría de colas 07 04 25

▸ Cola

- Longitud promedio de la línea: $L_q = \dfrac{A^2}{S(S-A)}$

- Tiempo de espera promedio: $W_q = \dfrac{L_q}{A} = \dfrac{A}{S(S-A)}$

- Sistema

- Longitud promedio de la línea: $L_s = L_q + \dfrac{A}{S} = \dfrac{A}{S-A}$

- Tiempo de espera promedio: $W_s = \dfrac{L_s}{A} = \dfrac{A}{S-A}$

- Utilización de la instalación: $U = \dfrac{A}{S}$

- Probabilidad de que la línea exceda n: $P(L_s > n) = \left(\dfrac{A}{S}\right)^{n+1}$

a)

$A = \lambda = 5$

$S = \mu = 10$

$\rho = \frac{5}{10} = 0.5$ $\quad P(L_s > 1) = \rho^2 = 0.5^2 = 0.25$

$L_q = \frac{5^2}{5(10)} = \frac{25}{50} = 0.5$

$W_q = \frac{50}{5} = 0.1$ horas $= 6$ minutos

$L_s = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$

$W_s = \frac{1}{5} = 0.2$ horas $= 12$ minutos

b)

$A = \lambda = 10\ u/h$ $\quad$ $\cdot$ 3 min $= 0.05\ h \rightarrow \mu = 1/0.05 = 20\ u/h$

Utilizacion (ρ)

$\rho = \frac{10}{20} = 0.5$

$P(L_s > 1) = \rho^2 = 0.5^2 = 0.25$

$W_s = \frac{1}{10} = 0.1h = 6$ minutos

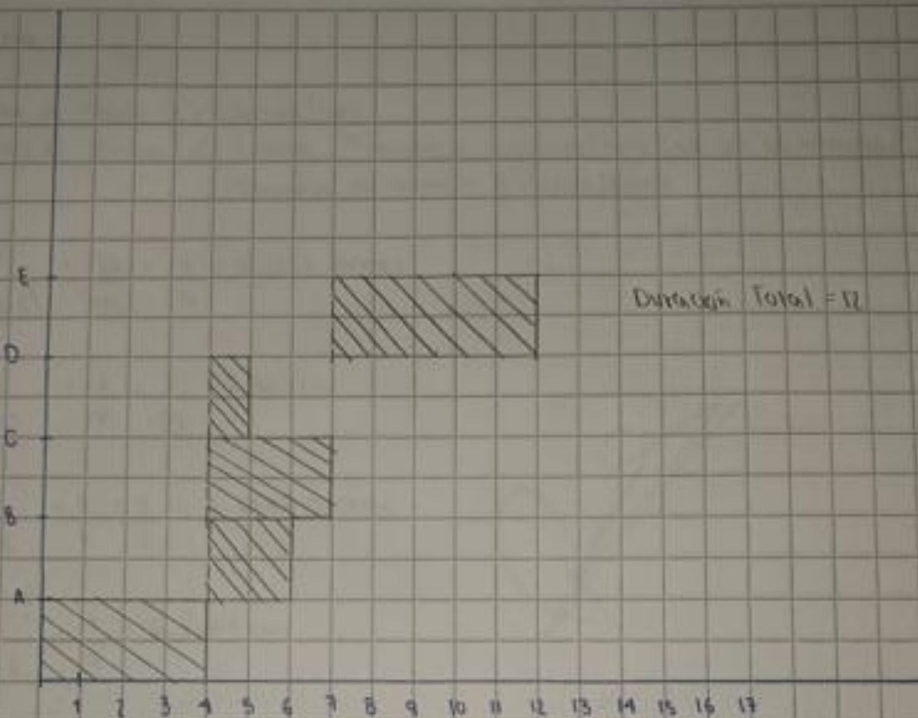
$L_q = \frac{0.5^2}{1-0.5} = 0.5$

$W_q = \frac{0.5}{10} = 0.05h = 3$ minutos

$L_s = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$

▸ Gráfica de Gantt

08 04 25



Ejercicios U4

Problema 1

Datos:

Tasa de llegada (λ): 6 clientes / hora

Tasa de servicio (μ): 1 cliente / 4 minutos = 15 clientes / hora (ya que 60 minutos / 4 minutos por cliente = 15 clientes / hora)

$$Lq = \frac{6^2}{15(15-6)} = \frac{36}{135} = \frac{4}{15} = 0.2667 \text{ clientes}$$

$$Wq = \frac{6}{15 \times 9} = \frac{6}{135} = \frac{2}{45} = 2.6667 \text{ m}$$

$$Ls = \frac{6}{15-6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0.6667 \text{ clientes}$$

$$Ws = \frac{1}{15-6} = \frac{1}{9} = 6.6667 \text{ min}$$

Problema 2

Factor de utilización: 50%

Tiempo Prom. Sist.: 8 hrs

Num. Prom. Sistema: 1 máquina

Tiempo Prom. Colas: 4 hrs

Prob. 2 maq. sistema: 12.5%

Num. esp. Cola: 0.5 máquinas

Porcentaje de tiempo ocio: 50%

$$Lq = \frac{3^2}{6(6-3)} = \frac{9}{18} = 0.5 \text{ maq}$$

$$Wq = \frac{3}{6 \times 3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \text{ días} \simeq 4 \text{ horas}$$

$$Ls = \frac{3}{6-3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ maq}$$

$$Ws = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3} \text{ días} \simeq 8 \text{ horas}$$

1. Problema

$\mu = 40$ clientes x hora

$\lambda = 10, 20, 30, 39$ clientes x hora

→ Cuando $\lambda = 10$

$U = 10/40 = 0.25$

$$L_q = \frac{10^2}{40(40-10)} = \frac{100}{1200} = 0.0833$$

$$W_q = \frac{10}{40(40-10)} = \frac{10}{1200} = 0.0083 \text{ horas}$$

↳ 0.5 min

$$L_s = \frac{10}{(40-10)} = 0.333$$

$$W_s = \frac{1}{40-10} = \frac{1}{30} = 0.033 \text{ horas}$$

↳ 2 min

→ Cuando $\lambda = 20$

$U = 20/40 = 0.5$

$$L_q = \frac{20^2}{40(40-20)} = \frac{400}{800} = 0.5$$

$$W_q = \frac{20}{40(40-20)} = \frac{20}{800} = 0.025 \text{ h} = 1.5 \text{ min}$$

$$L_s = \frac{20}{40-20} = \frac{20}{20} = 1$$

$$W_s = \frac{1}{40-20} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ h} = 3 \text{ min}$$

→ Cuando $\lambda = 30$

$U = 30/40 = 0.75$

$$L_q = \frac{30^2}{40(40-30)} = \frac{900}{400} = 2.25$$

$$W_q = \frac{30}{40(40-30)} = 30/400 = 0.075 \text{ h}$$

↳ 4.5 m

$$L_s = \frac{30}{40-30} = \frac{30}{10} = 3$$

$$W_s = \frac{1}{40-30} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ h} = 6 \text{ min}$$

→ Cuando $\lambda = 39$

$U = 39/40 = .975$

$$L_q = \frac{39^2}{40(40-39)} = \frac{1521}{40} = 38.025$$

$$W_q = \frac{39}{40(40-39)} = \frac{39}{40} = 0.975 = 58.5 \text{ m}$$

$$L_s = \frac{39}{40-39} = 1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

2. $\mu = 30$ clientes $\times h$

$\lambda = 15$ clientes $\times h$

$U = \frac{15}{30} = 0.5$

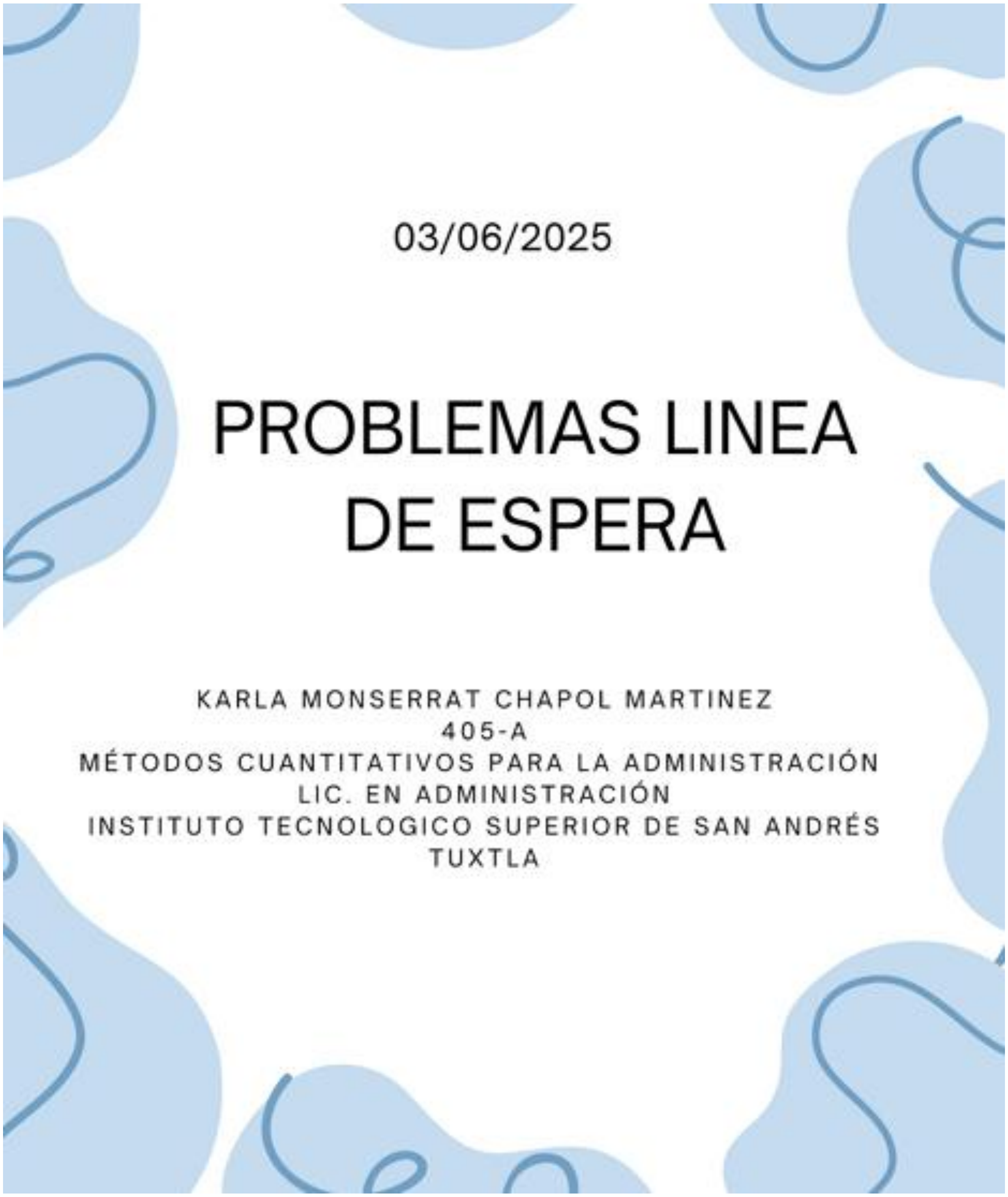
$L_q = \frac{15^2}{30(30-15)} = \frac{225}{450} = 0.5$

$W_q = \frac{15}{30(30-15)} = \frac{15}{450} = 0.0333\,h = 2\,min$

$L_s = \frac{15}{30-15} = \frac{15}{15} = 1$

$W_s = \frac{1}{30-15} = \frac{1}{15} = 0.0667\,h = 4\,min$

LIBRETA DE APUNTES



Problemario U-4 | 03 | 06 | 15

Karla Monserrat Chapol Martinez

1

Datos

μ = 40 x h

λ = 10, 20, 30 y 39 x h

• Para λ = 20

P = 20/40 = 0.5 = 50%

Lq = 400/40(20) = 400/800 = 0.5

Wq = 0.5/20 = 0.025 h = 1.25 m

Ls = 20/(40-20) = 1

Ws = 1/20 = 0.05 h = 3 m

U = 50%

• Para λ = 39

P = 39/40 = 0.975 = 97.5%

Lq = 1,521/40(1) = 38.03

Wq = 38.03/39 ≈ 0.975h = 58.5 m

Ls = 39/1 = 39

Ws = 1/1 = 1h = 60m

U = 97.5%

• Para λ = 10

P = 10/40 = 0.25 = 25%

Lq = 10^2/40(40-10) = 100/1200 = 0.083

Wq = 0.083/10 = 0.0083 h = 0.5 m

Ls = 10/(40-10) = 10/30 = 0.333

Ws = 1/(40-10) = 1/30 ≈ 0.033h = 2m

U = 25%

• Para λ = 30

P = 30/40 = 0.75 = 75%

Lq = 900/40(10) = 900/400 = 2.25

Wq = 2.25/30 = 0.075 h = 4.5 m

Ls = 30/10 = 3

Ws = 1/10 = 0.1 h = 6 m

U = 75%

2

Datos

μ = 30 clientes x h

λ = 15 clientes x h

P = 15/30 = 0.5 = 50%

Lq = 225/30(15) = 225/450 = 0.5

Wq = 0.5/15 = 0.033h = 2m

Ls = 15/(30-15) = 1

Ws = 1/15 = 0.0667 h = 4 m

U = 50%

3

Datos

λ = 20 solicitudes x h

Tiempo S = 4 m = 4/60 = 0.0667 h = μ = 1/0.0667

μ = 15/h

P = 20/15 = 1.33 (Sistema Inestable)

▸ No se pueden aplicar las fórmulas estandar porque la cola crecería indefinidamente

EXAMEN 4

Carlos Augusto Cobix Osorio

Examen 4.

Ejercicio 1.

Tasa de llegadas $\lambda = 6$ pacientes/h

Tiempo de servicio = 8 minutos = 8/60 hrs = 0.1333 hrs

$\mu = 1/0.1333 = 7.5$ pacientes/hora

A) $W_q = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{6}{7.5 \cdot 1.5} = \frac{6}{11.25} = 0.5333$ horas = 32 minutos

B) Numero promedio

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{6^2}{7.5(7.5-6)} = \frac{36}{11.25} = 3.2 \text{ pacientes}$$

C)

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{6}{7.5} = 0.2 = 20\%$$

Ejercicio 2.

Datos

Tasa de llegadas (λ) = 3 personas / h

Tiempo de servicio = 15 min = 0.25 → μ = 1 / 0.25 = 4 personas / h

A) $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 = 25\%$

B) Probabilidad de 2 visitantes

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, \text{ donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$P_2 = (1-0.75)(0.75)^2 = 0.25 \cdot 0.5625 = 0.1406 = 14.06\%$$

C) Numero promedio de visitantes

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = \frac{3}{1} = 3 \text{ personas}$$

D) Tiempo promedio en el sistema

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1} = 1 \text{ hora}$$

E) Numero de clientes que esperan ser atendidos

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3^2}{4(4-3)} = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ personas}$$