Instrumento de Evaluación.

Lista de Cotejo para evaluar trabajo de investigación.

Nombre de la Materia: ***Cálculo Integral.***	*Grupo: 206-A* *Instituto: ITSSAT*
Profesor: Ing. Manuel Montoya N.	*Unidad: 3*
Alumno: CRUZ MARTINEZ KATHERINE	*Fecha de aplicación: 06-05-2025*

Objetivo educacional:

Utiliza las definiciones de integral y las técnicas de integración para la solución de problemas geométricos y aplicados en la ingeniería.

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
10%	Investigo los conceptos requeridos.	√		
5%	Definió en forma correcta las ecuaciones.	√		
5%	Realizo su trabajo a mano y con ortografía correcta.	√		
5%	Es un trabajo limpio, ordenado y presenta margen.	√		
5%	Lo entrego en tiempo y forma.	√		
30%	**CALIFICACIÓN**	30		

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Materia: Calculo Integral   Grupo: 206-A
Fecha: 6-Mayo-2025   Estudiante: Katherine Cruz Martínez

Tres aplicaciones de la integral con ejemplos resueltos para Ingeniería Ambiental

1- Cálculo de la Carga Contaminante en un Río

Aplicación

Determinar la carga total de un contaminante (como DBO o nitrógeno) en un río o efluente.

Ejemplo

La concentración de DBO (Demanda Bioquímica de Oxígeno) a lo largo de 500 m de un río sigue la función:

$$C(x) = 5e^{-0.002x} \quad (mg/L)$$

y el caudal del río es constante:

$$Q = 2 m^3/s$$

Calcular la carga total de DBO en ese tramo.

Solución

La carga total (en mg/s) se calcula como:

$$\text{Carga} = Q\int_0^{500} C(x)\,dx$$

Sustituimos

$$\text{Carga} = 2\int_0^{500} 5e^{-0.002x}\,dx$$

Calculamos la integral

$$= 10\int_0^{500} e^{-0.002x}\,dx = 10\left[\frac{-1}{0.002}e^{-0.002x}\right]_0^{500}$$

$$= 10\cdot(-500)(e^{-1}-1) = -5000(e^{-1}-1) = -5000(0.3679-1) = 3160.5 \text{ mg/s}$$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 6-Mayo-2025
Katherine Cruz Martinez

2-Volumen de Agua Acumulada en una Cuenca
Aplicación
Calcular el volumen de agua escurrida o acumulada en una cuenca por una lluvia con, intensidad variable.
Ejemplo
La intensidad de lluvia (en mm/h) en una cuenca de $2 km^2$ durante una hora está dada por:

$$I(t) = 30te^{-0.5t} \quad (0 \leq t \leq 1, \text{ en horas})$$

Calcular el volumen total de agua caída
Solución
Volumen = Area x Profundidad total (integral de intensidad):

$$V = A\int_0^1 I(t)\,dt = 2\times10^6 \cdot \int_0^1 30te^{-0.5t}\,dt$$
$$= 2\times10^6 \cdot 30\int_0^1 te^{-0.5t}\,dt$$

Usamos integración por partes o tabla:

$$\int_0^1 te^{-0.5t}\,dt = \left[-2te^{-0.5t} - 4e^{-0.5t}\right]_0^1 = (-2e^{-0.5} - 4e^{-0.5}) - (0-4) =$$

$$= -6e^{-0.5} + 4 \approx -6(0.6065) + 4 \approx 0.36$$
$$V \approx 2\cdot10^6 \cdot 30 \cdot 0.36 = 21.6\cdot10^6 \text{ litros} = 21{,}600\, m^3$$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 6-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

3.- Energía Solar Acumulada sobre un Panel

Aplicación

Estimar la energía solar incidente acumulada sobre un panel durante el día.

Ejemplo

La radiación solar sobre una superficie horizontal (en W/m^2) durante el día está dada por:

$$R(t) = 800\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \quad (0 \leq t \leq 12 \text{ horas})$$

¿Cuánta energía por metro cuadrado se acumula durante ese periodo?

Solución:

$$E = \int_0^{12} R(t)\,dt = \int_0^{12} 800\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)dt$$

Sustituimos

$$u = \frac{\pi t}{12},\ dt = \frac{12}{\pi}du \Rightarrow \int_0^{\pi} 800 \cdot \frac{12}{\pi}\sin(u)\,du = \frac{9600}{\pi}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{9600}{\pi}(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{9600}{\pi}(1+1) = \frac{19200}{\pi} \approx 6111.6\ Wh/m^2$$

Instrumento de Evaluación.

Lista de Cotejo para evaluar trabajo de investigación. Formulario.

Nombre de la Materia: Cálculo Integral.	Grupo: 206-A
	Instituto: ITSSAT
Profesor: Ing. Manuel Montoya N.	Unidad: 3
Alumno: CRUZ MARTINEZ KATHERINE	Fecha de aplicación: 6-05-2025

Objetivo educacional:

Utiliza las definiciones de integral y las técnicas de integración para la solución de problemas geométricos y aplicados en la ingeniería.

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
4%	Investigo los conceptos requeridos.	√		
4%	Definió en forma correcta el contenido.	√		
4%	Realizo su trabajo a mano y con las fórmulas correctas.	√		
4%	Es un trabajo limpio, ordenado y presenta margen.	√		
4%	Lo entrego en tiempo y forma.	√		
20%	**CALIFICACIÓN**	**20**		

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 6-Mayo-2026
Katherine Cruz Martínez

Formulario

Ecuación Fourier $\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dx}$

conducción de calor $\frac{q}{A} \int_{x_1}^{x_2} dx = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$

geometría cilíndrica $q = \frac{-2\pi l k (T_2 - T_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

$$q \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = -4\pi k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

Cinetica química $v = -\frac{d[A]}{dt} = \; v = k[A]^n$

orden n $v = k[A]^n$ $\int_{[A]_i}^{[A]_f} [A]^{-n} d[A] = -k \int_{t_i}^{t} dt$

Orden 2 $[A]_f^{-2+1} = kt(n-1) + [A]_i^{-2+1}$

ecuación de orden n $[A]_f^{-n+1} = kt(n-1) + [A]_i^{-n+1}$

multiplicando $[A]_f^{-n+1} - [A]_i^{-n+1} = -kt(-n+1)$

Lista de Cotejo para resolución de ejercicios.

<table>
<tr><td colspan="3">Nombre de la Materia:
Cálculo Integral.</td><td colspan="3">Grupo: 206-A</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">Profesor: Ing. Manuel Montoya N.</td><td colspan="3">Instituto: ITSSAT</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad: 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Alumno: CRUZ MARTINEZ KATHERINE</td><td colspan="3">Fecha de aplicación: 12-05-2025</td></tr>
<tr><td colspan="6">INSTRUCCIÒN</td></tr>
<tr><td colspan="6">Revisar los documentos o actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia a evaluar se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” ocúpela cuando tenga que hacer comentarios referentes a lo observado.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">VALOR DEL REACTIVO</td><td rowspan="2">CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)</td><td colspan="2">CUMPLE</td><td rowspan="2" colspan="2">OBSERVACIONES</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>2%</td><td>Presenta un trabajo limpio y ordenado.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2%</td><td>Escribe los ejercicios en forma clara en su trabajo.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2%</td><td>Utiliza las ecuaciones y fórmulas adecuadas.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2%</td><td>La respuesta de los ejercicios es la correcta.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>2%</td><td>Presenta los resultados en forma clara.</td><td>√</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>10%</td><td>CALIFICACIÓN</td><td>10</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 12-Mayo-2025 Katherine Cruz Martínez

Ejercicios de la Tercera Unidad

Ejercicio 1: Cálculo del caudal de un río.

Un río tiene un caudal que varía con el tiempo según la función $Q(t)=2t+3.5$, donde t es el tiempo en horas y $Q(t)$ es el caudal en m^3/h. ¿Cuál es el volumen total del agua que fluye por el río en un periodo de 8 horas?

$Q(t)=2t+3.5$ $\quad t=0$ a $t=8$

$$V=\int_0^8 Q(t)\,dt=\int_0^8 (2t+3.5)\,dt$$

$$\int (2t+3.5)\,dt=\int 2t\,dt+\int 3.5\,dt=t^2+3.5t$$

$$V=t^2+3.5t\Big|_0^8=(8^2+3.5\cdot 8)-(0^2+3.5\cdot 0)$$

$$V=(64+28)-0=92\,m^3$$

Ejercicio 2: Cálculo de la cantidad de contaminantes en un lago.

Un lago tiene una concentración de contaminantes que varía con la profundidad según la función $C(x)=3x+5$, donde x es la profundidad en metros y $C(x)$ es la concentración de contaminantes en mg/L. Si el lago tiene una profundidad máxima de 10 metros y un área superficial de 19000 m^2, ¿Cuál es la cantidad total de contaminantes en el lago?

$C(x)=3x+5$

Profundidad máxima: 10m

Area Superficial: $A=19000\ m^2$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 12-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

$dV = A \cdot dx = 19000 \cdot dx\, m^3$

$dV = 19000 \cdot 1000 \cdot dx = 19000\,000 \cdot dx\, L$

Cantidad total(mgs) $= \int_0^{10} C(x) \cdot dV = \int_0^{10} (3x+5) \cdot 19000\,000\, dx$

$= 19000\,000 \cdot \int_0^{10} (3x+5)\, dx$

$\int_0^{10} (3x+5)\, dx = \frac{3}{2}x^2 + 5x \Big|_0^{10} = \left(\frac{3}{2} \cdot 100 + 50\right) = (150+50) = 200$

Cantidad total $= 19000000 \cdot 200 = 3800000000$ mg

Ejercicio 3: Cálculo del flujo de agua a través de una tubería

Una tubería tiene un flujo de agua que varía con la distancia según la función $Q(x) = 0.5x + 2$, donde x es la distancia en metros y $Q(x)$ es el flujo en m^3/s. ¿Cual es el volumen total de agua que fluye a través de la tubería en un periodo de 10 metros?

$Q(x) = 0.5x + 2 \quad x = 0 \text{ a } x = 10m$

$V = \int_0^{10} Q(x)\, dx = \int_0^{10} (0.5x + 2)\, dx$

$\int (0.5x + 2)\, dx = 0.25x^2 + 2x$

$V = 0.25x^2 + 2x \Big|_0^{10} = (0.25 \cdot 100 + 2 \cdot 10) - 0 = 25 + 20 = 45 \frac{m^3}{s \cdot m}$

EXAMEN

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 19-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

40%

Examen De La Tercera Unidad

Problema 1: Cálculo del caudal de un río

Un río tiene un caudal que varía con el tiempo según la función $Q(t)=2t^3+5t$, donde t es el tiempo en horas y $Q(t)$ es el caudal en m^3/h. ¿Cuál es el volumen total de agua que fluye por el río en un periodo de 8 horas?

$Q(t)=2t^3+5t \quad t_0=0 \quad t_1=8$

$$V=\int_0^8 Q(t)\,dt=\int_0^8 (2t^3+5t)\,dt$$

$$\int(2t^3+5t)\,dt=\int 2t^3\,dt+\int 5t\,dt=2\frac{t^4}{4}+5\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^2+C$$

$$V=\frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^2\Big|_0^8=\left(\frac{1}{2}(8)^4+\frac{5}{2}(8)^2\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^4+\frac{5}{2}(0)^2\right)=$$

$$=2048+160-0+0=\boxed{2208\ m^3}$$

Problema 2: Cálculo de la cantidad de contaminantes en un lago.

Un lago tiene una concentración de contaminantes que varía con la profundidad según la función $C(x)=0.5e^x+0.1x$, donde x es la profundidad en metros y $C(x)$ es la concentración de contaminantes en mg/L. Si el lago tiene una profundidad máxima de 10 metros y un área superficial de 19 000 m^2, ¿Cuál es la cantidad total de contaminantes en el lago?

$C(x)=0.5e^x+0.1x \quad P_m=10\ m \quad A_s=19000\ m^2 \quad x=0 \quad x=10$

$dv=A\cdot dx=19000\cdot dx\ m^3$

$dv=19000\cdot 1000\cdot dx=19000000\cdot dx\ L$

$$\text{Cantidad total (mg)}=\int_0^{10} C(x)\cdot dv=\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\cdot 19000000\,dx=$$

$$=19000000\cdot\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\,dx=$$

$$\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\,dx=0.5\int_0^{10}e^x\,dx+0.1\int_0^{10}x\,dx$$

- $\int e^x\,dx=e^x$
- $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 19-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

Examen De La Tercera Unidad

Problema 1: Cálculo del caudal de un río

Un río tiene un caudal que varía con el tiempo según la función $Q(t)=2t^3+5t$, donde t es el tiempo en horas y $Q(t)$ es el caudal en m^3/h. ¿Cuál es el volumen total de agua que fluye por el río en un período de 8 horas?

$Q(t)=2t^3+5t \quad t=0 \;\; t=8$

$$V=\int_0^8 Q(t)\,dt=\int_0^8 (2t^3+5t)\,dt$$

$$\int(2t^3+5t)\,dt=\int 2t^3\,dt+\int 5t\,dt=2\frac{t^4}{4}+5\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^2+C$$

$$V=\frac{1}{2}t^4+\frac{5}{2}t^2\Big|_0^8=\left(\frac{1}{2}(8)^4+\frac{5}{2}(8)^2\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^4+\frac{5}{2}(0)^2\right)=$$

$$=2048+160-0+0=\boxed{2208\ m^3}$$

Problema 2: Cálculo de la cantidad de contaminantes en un lago.

Un lago tiene una concentración de contaminantes que varía con la profundidad según la función $C(x)=0.5e^x+0.1x$, donde x es la profundidad en metros y $C(x)$ es la concentración de contaminantes en mg/L. Si el lago tiene una profundidad máxima de 10 metros y un área superficial de 19 000 m^2, ¿Cuál es la cantidad total de contaminantes en el lago?

$C(x)=0.5e^x+0.1x \quad P_{m}=10\,m \quad A_s=19000\,m^2 \quad x=0 \;\; x=10$

$dv=A\cdot dx=19000\cdot dx\ m^3$

$dv=19000\cdot 1000\cdot dx=19000000\cdot dx\ L$

$$\text{Cantidad total (mg)}=\int_0^{10} C(x)\cdot dv=\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\cdot 19000000\,dx=$$

$$=19000000\cdot\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\,dx=$$

$$\int_0^{10}(0.5e^x+0.1x)\,dx=0.5\int_0^{10}e^x\,dx+0.1\int_0^{10}x\,dx$$

- $\int e^x\,dx=e^x$
- $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral 206-A 14-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

$0.5(e^{10}-e^{0})+0.1\left(\frac{1}{2}(10^{2}-0^{2})\right)=$

$0.5(e^{10}-1)+0.1\cdot\frac{100}{2}=0.5(e^{10}-1)+5 \quad e^{10}=22026.4658$

$0.5(e^{10}-1)+5=0.5(22025.4658)+5=11012.7329+5=11017.7329$

Cantidad Total $=19000\cdot 11017.7329=\boxed{209{,}337{,}925\,mg}$

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés Tuxtla
Cálculo Integral   206-A   19-Mayo-2025
Katherine Cruz Martínez

Problema 3: Cálculo de la cantidad de sedimentos en un río

Un río tiene una cantidad de sedimentos que varía con la distancia según la función $S(x) = x \cdot (x^2+3)^{1/2}$ donde x es la distancia en metros y $S(x)$ es la cantidad de sedimentos en kg/m. ¿Cuál es la cantidad total de sedimentos en un tramo de 7 metros del río?

$u = x^2+3$ $x=0,\ u=0^2+3=3$
$du = 2x\,dx$ $x=7,\ u=7^2+3=52$
$x\,dx = \frac{1}{2}du$

$S(x) = x \cdot (x^2+3)^{1/2} = x \cdot \sqrt{x^2+3}$

$$\text{Cantidad Total} = \int_0^7 x \cdot \sqrt{x^2+3}\,dx =$$

$$\int_3^{52} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_3^{52} u^{1/2}du$$

$$\frac{1}{2}\int_3^{52} u^{1/2}du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_3^{52} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(52^{3/2} - 3^{3/2}) = \frac{1}{3}(52^{3/2} - 3^{3/2})$$

$$52^{3/2} = \sqrt{52^3} = \sqrt{140{,}608} = 375.01$$

$$3^{3/2} = \sqrt{27} = 5.196$$

$$\frac{1}{3}(375.01 - 5.196) = \frac{1}{3} \cdot 369.814 = \boxed{123.27\ \text{Kg}}$$

✓

Problema 4: Cálculo de la cantidad de contaminantes en el suelo

Un suelo tiene una concentración de contaminantes que varía con la profundidad según la función $C(x) = 2x^{1/2}+1$, donde x es la profundidad en metros y $C(x)$ es la concentración de contaminantes en mg/kg. Si el suelo tiene una profundidad máxima de 5 metros y un área superficial de 100 m², ¿Cuál es la cantidad total de contaminantes en el suelo?

$C(x) = 2x^{1/2}+1 = 2\sqrt{x}+1$ $x=0$ a $x=5$ $A = 100\ m^2$ [illegible]

$$\int_0^5 C(x)\,dx = \int_0^5 (2\sqrt{x}+1)\,dx \qquad \int (2\sqrt{x}+1)\,dx = \int 2x^{1/2}dx + \int 1\,dx = 2\tfrac{2}{3}x^{3/2} + x =$$

$$= \frac{4}{3}x^{3/2} + x \qquad \frac{4}{3}x^{3/2} + x \Big|_0^5 = \frac{4}{3}(5)^{3/2} + 5 = 19.907\ \text{mg/kg por m}^2$$

$$\text{Cantidad Total} = 19.907 \cdot 100 = \boxed{1990.7\ \text{mg/kg}}$$

✓