

INVESTIGACIÓN

Subespacios Vectoriales: Definición, Propiedades y Aplicaciones

En el marco del Álgebra Lineal, los espacios vectoriales constituyen una estructura fundamental para comprender fenómenos matemáticos, físicos y computacionales. Un concepto esencial dentro de esta teoría es el de subespacio vectorial, que permite estudiar subconjuntos que conservan las propiedades de los espacios vectoriales y facilitan el análisis estructural de problemas lineales.

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V sobre un cuerpo $\neq \emptyset$ (como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) que

Estrella

está dotado de dos operaciones:

- Suma de vectores
- Multiplicación por escalares

Un subespacio vectorial es un subconjunto $W \subseteq V$ que también forma un espacio vectorial con las mismas operaciones de V .

Para que W sea un subespacio debe cumplir 3 condiciones clave:

- 1.- Contener al vector cero.
- 2.- Ser cerrado bajo la suma de vectores
- 3.- Ser cerrado bajo la multiplicación por escalares

= Propiedades de los Subespacios Vectoriales =

- La intersección de subespacios es también un subespacio.

- La suma de subespacios es el menor subespacio que contiene a ambos.

- El conjunto formado por todos los múltiplos escalares de un vector en V es un subespacio llamado recta vectorial.

- Todo subespacio contiene al vector cero y a los opuestos aditivos de sus elementos.

- El espacio nulo $\{0\}$ y el espacio total V son subespacios triviales.

= Aplicaciones =

- En Física, descripción de movimientos, fuerzas o campos eléctricos en espacios vectoriales.

- En Computación, espacios de soluciones a

sistemas lineales, análisis de imágenes y compresión de datos.

- En estadística, regresión lineal y reducción de dimensión mediante técnicas como PCA (Análisis de componentes principales)
- En Ingeniería, análisis estructural, control de sistemas y representación de señales

El estudio de los subespacios vectoriales es esencial en la formación matemática avanzada. Su comprensión permite abordar problemas de mayor complejidad, tanto teóricos como aplicados. Además, su utilidad en distintas áreas del conocimiento refuerza la importancia de dominar sus propiedades y su estructura.

LISTA DE COTEJO PARA INVESTIGACION DOCUMENTAL

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno(a): Martha Cecilia Matías Seba			
GRUPO:	204-A	CARRERA:	INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA	NOMBRE DEL CURSO: Algebra Lineal
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO	FIRMA DEL DOCENTE

DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO: espacios vectoriales	FECHA: 23 DE MAYO DEL 2025	PERIODO ESCOLAR: FEBRERO-JUNIO 2025

INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN			
-----------------------------	--	--	--

Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
2%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: a. Buena presentación	X		
2%	b. Introducción	X		
2%	c. Ortografía	X		
4%	d. Desarrollo coherente del tema	X		
4%	e. citar fuentes de información	X		
2%	Enfoque: buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
20%	Elaboración: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
4%	Responsabilidad: Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
40%	CALIFICACIÓN	40		



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE
SAN ANDRÉS TUXTLA



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS
TUXTLA

MATERIA: ALGEBRA LINEAL.

GRUPO: 204 A

DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO

ALUMNO:

MARTHA CECILIA MATIAS SEBA.

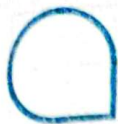
FECHA: 23/ 05/ 2025

CARRERA: INGENIERIA EN SISTEMAS
COMPUTACIONALES.

TEMA: UNIDAD 4 ESPACIOS VECTORIALES

PROBLEMARIO

SEGUNDO SEMESTRE



Equipo 1

1. ¿Qué es un espacio vectorial y cuáles son las dos operaciones principales que se pueden realizar en él?

Un espacio vectorial es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones: la suma de vectores, y la multiplicación por un escalar. Estas operaciones deben satisfacer ciertas propiedades (axiomas) para el conjunto se considere un espacio vectorial.

2. Describe tres de las condiciones que debe cumplir un conjunto para ser considerado un espacio vectorial

Para que un conjunto sea un espacio vectorial, debe cumplir con los siguientes axiomas:

- Asociatividad de la suma: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todos los vectores u, v, w en el conjunto.
- Existencia del elemento neutro: Existe un vector 0 tal que $u+0 = u$ para todo vector u en el conjunto.
- Existencia del inverso aditivo: Para cada vector u , existe un vector $-u$ tal que $u+(-u) = 0$.

3. Menciona y describe brevemente dos ejemplos de espacios vectoriales presentados en el documento

- $\mathbb{R}^n$; Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano y $\mathbb{R}^3$ es el espacio tridimensional familiar. La suma se realiza componente a componente.
- Espacio de polinomios de grado menor o igual a n : Este espacio vectorial contiene todos los polinomios de una variable con coeficientes reales y grado menor o igual a n .

4. ¿Cuál es la importancia de los espacios vectoriales?

les en matemáticas y otros áreas como la física o la ingeniería.)

Son fundamentales en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias. Proporcionan un marco abstracto para representar y manipular objetos matemáticos como vectores, matrices, y funciones.

5. Explica la propiedad de cerradura en el contexto de los espacios vectoriales.

La propiedad de cerradura significa que si realizas las operaciones definidas en un espacio vectorial sobre vectores pertenecientes al espacio, el resultado de la operación siempre será otro vector que también pertenece al mismo espacio.

Equipo 2 CUESTIONARIO

1. ¿Que condiciones debe cumplir un conjunto no vacío con una operación de suma y producto escalar para ser considerado un espacio vectorial? Debe cumplir los 10 axiomas o propiedades que definen un espacio vectorial, entre ellos:

- Clausura bajo la suma y el producto escalar
- Existencia del vector cero
- Existencia del inverso aditivo
- Propiedades asociativas y conmutativas de la suma
- Distributividad del producto escalar respecto a la suma de vectores y escalares
- Asociatividad del producto escalar
- Elemento neutro para el producto escalar ($1 \cdot v = v$)

2. ¿Qué es un subespacio vectorial y que propiedades debe satisfacer un subconjunto de un espacio vectorial para ser considerado como tal? Un subespacio vectorial es un subconjunto de un espacio vectorial que, con las mismas operaciones de suma y producto escalar, también es un espacio vectorial. Debe cumplir 3 condiciones fundamentales:

- 1.- Contener al vector cero
- 2.- Ser cerrado bajo la suma de vectores
- 3.- Ser cerrado bajo la multiplicación por escalares

Estos 3 condiciones son suficientes para asegurar que el subconjunto cumple los axiomas requeridos.

3. Dado un subconjunto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ definido como

Estrella

$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$, ¿es W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifica tu respuesta.

Sí, es un subespacio vectorial.

- El vector cero $(0, 0, 0)$ pertenece a W , ya que $0 + 0 + 0 = 0$.
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in W$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \in W$ porque la suma de dos vectores que cumplen $x + y + z = 0$ también cumple esa condición.
- Si $\vec{u} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \vec{u} \in W$ porque el resultado sigue cumpliendo la ecuación $x + y + z = 0$.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a los subespacios vectoriales?

a) Todo subespacio vectorial contiene al vector cero.

b) La intersección de dos subespacios siempre es el conjunto vacío.

c) Un subespacio puede no ser cerrado bajo la suma de vectores.

d) Un subespacio puede tener cualquier dimensión mayor que la del espacio vectorial original.

5. ¿Por qué es importante verificar la clausura bajo la suma y el producto escalar al determinar si un subconjunto es un subespacio vectorial?

Porque son condiciones esenciales para que el subconjunto herede la estructura de espacio vectorial.

PROBLEMA RIO

1. Ejercicio 1.

Sea el conjunto

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \}$$

Comprobamos si contiene el vector cero

El vector cero es $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Sustituimos en la ecuación:

$$\lambda - 2y + 3z = 0 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow S \tilde{A} \text{ pertenece a } \omega$$

Verificamos clausura bajo la suma

Sea $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \omega$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \omega$ entonces:

$$x_1 - 2y_1 + 3z_1 = 0, \quad x_2 - 2y_2 + 3z_2 = 0$$

Sumamos los vectores:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = (x_1 - 2y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2 + 3z_2) = 0 + 0 = 0$$

Verificamos la clausura bajo multiplicación escalar

Sea $\vec{u} = (x, y, z) \in \omega$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\alpha \vec{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\alpha x - 2(\alpha y) + 3(\alpha z) = \alpha(x - 2y + 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Si, ω es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

2. Ejercicio 2.

Sea el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Verificamos si contiene al vector cero

El vector cero es $\vec{0} = (0, 0)$. como $0 \geq 0$, entonces sí pertenece al conjunto S . Cumple esta condición

Verificamos clausura bajo la suma de vectores

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1) \in S$ y $\vec{v} = (x_2, y_2) \in S$, es decir,

$$x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0$$

Entonces:

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, cumple clausura bajo la suma

Verificamos la clausura bajo el producto escalar.

Sea $\vec{u} = (x, y) \in S$ y tomamos un escalar $\alpha = -1$. Entonces:

$$\alpha \vec{u} = (-x, -y)$$

No cumple clausura bajo el producto escalar. El conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, ya que no es cerrado bajo multiplicación por escalares.



Pregunta 1: Combinación Lineal

Define qué es una combinación lineal de un conjunto de vectores.

• Respuesta: Una combinación lineal es el resultado de multiplicar cada vector en un conjunto por un escalar (un número real) y luego sumar los productos resultantes. Es decir, si tenemos un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y un conjunto de escalares $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ una combinación lineal de estos vectores es el vector que se obtiene de la expresión $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$.

Pregunta 2: Independencia Lineal

Define el concepto de independencia lineal de un conjunto de vectores. ¿Qué implicación tiene que un conjunto de vectores sea linealmente dependiente?

• Respuesta: Un conjunto de vectores es linealmente independiente si la única manera de que la combinación lineal de los otros vectores del mismo conjunto. En términos más formales, un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si la única manera de que la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ sea igual al vector cero es que todos los escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ sean cero. Si existe al menos un escalar diferente de cero que satisfaga la ecuación del vector cero, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicio 1: Determinando una combinación lineal
Dado el vector $v = (7, -1, 8)$ y los vectores $u_1 = (1, 2, 3)$ y $u_2 = (2, -1, 1)$, ¿es v una combinación lineal de u_1 y u_2 ? Si lo es, encuentre los valores correspondientes.

Para que v sea una combinación lineal de u_1 y u_2 , deben existir escalares c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = v$$

Sustituyendo los vectores:

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(2, -1, 1) = (7, -1, 8)$$

Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales:

$$1. c_1 + 2c_2 = 7$$

$$2. 2c_1 - c_2 = -1$$

$$3. 3c_1 + c_2 = 8$$

Podemos resolver este sistema usando, por método de sustitución o eliminación.

De la ecuación (2), podemos despejar c_2 :

$$c_2 = 2c_1 + 1$$

Ahora, sustituimos la expresión para c_2 en la ecuación (1):

$$c_1 + 2(2c_1 + 1) = 7 \quad c_1 + 4c_1 + 2 = 7 \quad 5c_1 = 5 \quad c_1 = 1$$

Ahora sustituimos el valor de c_1 en la expresión para c_2 :

$$c_2 = 2(1) + 1 \quad c_2 = 3$$

Finalmente, verificamos si estos valores de c_1 y c_2 satisfacen la tercera ecuación:

$$3c_1 + c_2 = 3(1) + 3 = 3 + 3 = 6$$

Como $6 \neq 8$, los valores de $c_1 = 1$ y $c_2 = 3$ que satisfacen las primeras dos ecuaciones no satisfacen la tercera ecuación.

Por lo tanto, el vector $v = (7, -1, 8)$ no es una combinación lineal de $u_1 = (1, 2, 3)$ y $u_2 = (2, -1, 1)$.

Ejercicio 2: Determinando Independencia Lineal

Determina si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente.

$$v_1 = (1, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, 0, 1)$$

$$v_3 = (0, 1, 1)$$

Para determinar si el conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, debemos ver si la única solución a la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = (0, 0, 0)$ es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Sustituyendo los vectores:

$$c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 0, 1) + c_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Esto nos da el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$1. c_1 + c_2 = 0$$

$$2. c_1 + c_3 = 0$$

$$3. c_2 + c_3 = 0$$

Podemos resolver este sistema.

De la ecuación (1), $c_2 = -c_1$

De la ecuación (2), $c_3 = -c_1$

Ahora, sustituimos c_2 y c_3 en la ecuación (3): $c_2 + c_3 = 0$
 $-c_1 - c_1 = 0 \Rightarrow -2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Ahora que sabemos $c_1 = 0$, podemos encontrar c_2 y c_3 :
 $c_2 = -c_1 = -0 = 0$
 $c_3 = -c_1 = -0 = 0$

Dado que la única solución al sistema es $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$, el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.



Problema 1: Base y dimensión

Considera el subespacio w de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x - 2y + 3z = 0$

1. Encuentra una base para w

2. Determina la dimensión de w

1.- El subespacio w está definido por la ecuación $x - 2y + 3z = 0$. Podemos expresar una variable en términos de las otras. Por ejemplo, $x = 2y - 3z$

Un vector (x, y, z) en w puede escribirse como:

$$(2y - 3z, y, z)$$

Podemos descomponer esto en una combinación lineal de vectores:

$$(2y, y, 0) + (-3z, 0, z)$$

$$y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Así cualquier vector en w es una combinación lineal de vectores $(2, 1, 0)$ y $(-3, 0, 1)$

Estos dos vectores son linealmente independientes (ya que uno no es múltiplo escalar del otro) y generan w . Por lo tanto, una base para w es $B_w = \{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$

2. Dado que la base B_w tiene dos vectores, la dimensión de w es 2. $\dim(w) = 2$.

Problema 2: Cambio de base

Sea $V = \mathbb{R}^2$. Considera las siguientes dos bases para V :

• Base estándar: $B = e_1, e_2 = (1, 0), (0, 1)$

• Nueva base: $B' = v_1, v_2 = (2, 1), (-1, 1)$

1. Encuentra la matriz de cambio de base de B' a B , denotada por $P_{B' \rightarrow B}$

2. Encuentra la matriz de cambio de base de B a B' , denotada por $P_{B \rightarrow B'}$.

3. Si un vector v tiene coordenados $[v]_{B'} = (3 \ -2)$ con respecto a la base B' , encuentra las coordenadas de v respecto a B , es decir $[v]_B$.

1. Esta matriz se forma colocando los vectores de la base B' como columnas, expresados en términos de la base B que es la base estándar en este caso)

$$u_1 = (2, 1) = 2e_1 + 1e_2$$

$$u_2 = (-1, 1) = -1e_1 + 1e_2$$

Entonces $P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Esta matriz es la inversa de $P_{B' \rightarrow B}$.

$$P_{B \rightarrow B'} = (P_{B' \rightarrow B})^{-1}$$

Para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

El determinante de $P_{B' \rightarrow B}$ es $(2)(1) - (-1)(1) = 2+1=3$.

$$P_{B \rightarrow B'} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

3. Tenemos $[v]_{B'} = (3 \ -2)$.

Para encontrar $[v]_B$ usamos la relación

$$[v]_B = P_{B' \rightarrow B} [v]_{B'}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} (1/3)(3) + (1/3)(-2) \\ (-1/3)(3) + (2/3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2/3 \\ -1-4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Así, las coordenadas de v con respecto a la base B son $(1/3, -5/3)$. Esto significa que

$$v = \frac{1}{3}e_1 - \frac{5}{3}e_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Equipo 5

1. SOPA DE LETRAS "ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO"

N O R M A A N G U L O M B V
O R T O N O R M A L Y E S D
R A D R I J O H I B A S E A
M I B P R O Y E C C I O N E
A T U R Q T A V D T C B T R
L I N T E R N O I O T A U N
P D S N P R O D U C T O O O
R O S U B E S P A C I O F M
O G B X L M N K V E C T O R
D U W Q R Y N H L R E A I L
U E Z H O E Q J I E P E I A
C N R O T O G O N A L S C R
T A R E P W A L M U P M X R
O B A S E K V C L N M B Q U

Encuentra las siguientes palabras de acuerdo a los Espacios Vectoriales con Producto Interno:

- | | |
|---------------|-----------------|
| 1. ✓ NORMA | 6. ✓ ORTONORMAL |
| 2. ✓ PRODUCTO | 7. ✓ PROYECCION |
| 3. ✓ INTERNO | 8. ✓ SUBESPACIO |
| 4. ✓ ANGULO | 9. ✓ BASE |
| 5. ORTOGONAL | 10. ✓ VECTOR |

Resuelve las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo también se conoce a un espacio vectorial con producto interno?
Espacio prehilbertiano o espacio con producto escalar
2. ¿Qué tipo de estructura adicional se dota a un espacio vectorial con producto interno? A un espacio vectorial con producto interno se le dota de la estructura adicional de un producto interno, que es una función que asocia a cada par de vectores un escalar.
3. Según la simbología, ¿qué representa la letra 'V'?
Espacio vectorial
4. Según la simbología, ¿qué representan las letras 'x, w, v, u'?
Representan los vectores en el espacio vectorial V
5. Según la simbología, ¿qué representa la letra 'c'?
Representa un escalar en el campo escalar asociado al espacio vectorial.
6. Según la simbología, ¿qué representa?
Representa una norma o magnitud del vector x , $\|x\|$ calculado como la raíz cuadrada del producto interno de x consigo mismo
7. Según la simbología, ¿qué representa?
La simbología $\langle u, v \rangle$ representa el producto interno de los vectores u y v
8. ¿Cuál es el campo escalar en los Espacios Vectoriales Complejos con Producto Interno? Es el conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$
9. ¿Qué tipo de función lineal es el producto interno en espacios complejos, con respecto a su segundo argumento?
Lineal conjugada
10. ¿Cuál es el ejemplo más común de un campo escalar en espacios complejos con producto interno?
 $\mathbb{C}$
11. ¿Cuál es el campo escalar en los Espacios Vectoriales Reales con Producto Interno?
 $\mathbb{R}$

12. ¿Qué tipo de función es el producto interno en espacios reales?

Bilineal, simétrica y definido positivo

13. ¿Cuál es el ejemplo más común de un campo escalar en espacios reales con producto interno?

$$f(x) = \langle v, x \rangle$$

14. Según la dimensión, ¿qué tipo de dimensión tienen los Espacios Vector Finitos con Producto Interno?

Dimensión finito

15. ¿Qué ejemplos de espacios se mencionan que tienen una base finita y sus respectivos productos internos estándar?

$\mathbb{R}^n$ y el espacio de polinomios de grado menor o igual a n .

Resuelve la siguiente sopa de letras, palabras a encontrar son las respuestas de las preguntas:

GEKOE ESPACIOPREHILBERTIANOISLGJSHZ
NUMEROS COMPLEJOS GAFWNUAEROSFINITA
PRODUCTOINTERNODJHDKSMBPRKBILINEAL
A VECTORESCONJUGADO FAPSGAGAKQFRNM
CTORUN NORMADEL VECTOR UCE GTSGGFHFZM
HDGCIGKOSBXIORMADEL VECTOR VUMEROSJ
OGVUHE ESPACIOVECTORIAL REALES LYGFAM
VGONSTANTERNCGNESPACIOTDPMGFFESPAJI
ERNA CONJUGADOBILINEAL JMGRASIFRKHRRK
CTORESFINITANUMEROSRJHFDJDDIFNMFG
TOS CONSTANTESSPACIOVECTORES LINEALIB
HDPYJB NORMADEL VECTOR UNUMEROSPGYT
RMADEL VECTORV CONJUGADOJGMGKFOGH



Cuestionario: Base ortonormal, proceso de Orto normalización de Gram-Schmidt

1. ¿Qué condiciones debe cumplir un conjunto de vectores para ser una base ortonormal?

Deben ser ortogonales entre sí y cada vector debe tener norma unitaria (Longitud igual a 1)

2. ¿Qué es el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt?

Es un método que convierte un conjunto de vectores linealmente independientes en una base ortonormal del mismo espacio

3. ¿Cuál es la fórmula para obtener el primer vector ortonormal en Gram-Schmidt? $u_1 = v_1 / \|v_1\|$

4. ¿Qué se hace con cada nuevo vector v_k en el proceso? Se le restan las proyecciones sobre los vectores ortonormales anteriores para hacerlo ortogonal, y luego se normaliza.

5. ¿Qué fórmula se usa para ortogonalizar un vector v_k ? $w_k = v_k - \sum (v_k \cdot u_j) u_j$, para j de 1 a $k-1$

6. ¿Qué fórmula se aplica después para normalizarlo? $u_k = w_k / \|w_k\|$

7. ¿Qué propiedad garantiza que los vectores obtenidos estén separados a 90° entre sí? La ortogonalidad (producto punto entre vectores distintos es cero)

8. ¿Qué ventajas tiene trabajar con bases ortonormales? Simplifican cálculos de proyecciones, cambios de base, transformaciones lineales y permiten interpretar vectores geoméricamente.

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO			ASIGNATURA: Algebra Lineal		
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN					
		NOMBRE DEL ALUMNO: Martha Cecilia Matías Seba	UNIDAD: CUATRO		
PERIODO: febrero-junio2025	GRUPO:204-A		FECHA DE ENTREGA:23 de mayo 2025		
INSTRUCCIONES					
		Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.			
VALOR DEL REACTIVO		CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
			SI	NO	
4%		PRESENTACIÓN: El trabajo cumple con los requisitos de a. Buena presentación b. No tiene faltas de ortografía c. Ordenado y limpio	X		
4%		FORMATO DE ENTREGA: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
20%		DESARROLLO DE EJERCICIOS: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
8%		RESULTADO: El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
4%		RESPONSABILIDAD: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
40%		CALIFICACIÓN	40		



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE
SAN ANDRÉS TUXTLA



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS
TUXTLA

MATERIA: ALGEBRA LINEAL.

GRUPO: 204 A

DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO

ALUMNO:

MARTHA CECILIA MATIAS SEBA.

FECHA: 23/ 05/ 2025

CARRERA: INGENIERIA EN SISTEMAS
COMPUTACIONALES.

TEMA: UNIDAD 4 ESPACIOS VECTORIALES

EXAMEN

SEGUNDO SEMESTRE

Examen unidad 4 Álgebra Lineal

Lee atentamente y resuelve los siguientes ejercicios de espacios vectoriales:

Ejercicio 1: El SUBESPACIO DE JUAN

Juan estudio Ingeniería y está revisando si un conjunto de funciones puede considerarse un subespacio vectorial. Él define el conjunto:

$$S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$$

Es decir, el conjunto de todas las funciones reales que se anulan en el punto $x=0$.

Pregunta = Ayuda a Juan a demostrar si S es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones reales $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Espacio vectorial de referencia:

El espacio donde vivimos es $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, el conjunto de todas las funciones reales con dominio en $\mathbb{R}$.

Condición del conjunto S :

Son funciones f tales que $f(0) = 0$. Veamos si cumplen las propiedades de subespacio.

Cierre bajo la suma:

Sean $f, g \in S$, entonces:

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad g(0) = 0$$

Entonces:

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow f+g \in S$$

Función cero

La función cero $f(x) = 0$ para todo x , cumple

$$f(0) = 0 \Rightarrow \text{pertenece a } S$$

Respuesta Si, S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Ejercicio 2: EL ESPACIO DE VECTORES DE MARÍA
María está estudiando un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$, definidos así:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$

=Pregunta= Ayuda a María a determinar si W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Espacio vectorial de referencia: Estamos en $\mathbb{R}^3$

Definición del conjunto W :

Todos los vectores (x, y, z) que cumplen la ecuación $x + 2y + z = 0$

Cierre bajo la suma:

$$\text{Sean } \vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in W \text{ y } \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in W$$

Entonces:

$$x_1 + 2y_1 + z_1 = 0, \quad x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$$

Sumamos:

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + z_1) +$$

$$(x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$$

Cierre bajo multiplicación escalar

$$\text{Sea } \vec{u} = (x, y, z) \in W, \text{ y } \lambda \in W$$

$$\text{Entonces: } x + 2y + z = 0 \Rightarrow (\lambda x + 2\lambda y + \lambda z) =$$

$$\lambda(x + 2y + z) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{u} \in W$$

Contiene al vector cero

El vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$ cumple:

$$0 + 2(0) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{0} \in W$$

Respuesta: Sí, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$