José Enrique Telona Zetina

Aportes al cálculo integral (Leibniz, Newton y Gauss)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Fue un matemático, filósofo e inventor aleman, Es reconocido por haber desarrollado de manera independiente el cálculo diferencial e integal al mismo tiempo que Isaac Newton. Sus aportes al cálculo integral fueron:

* Notacion de la integral: Leibniz introdujo el símbolo de la integral $\int$ reflejando una suma continua de infinitesimales.

* Reglas de integración: Desarrollo las reglas básicas de integracion, incluyendo la integral de potencias

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq 1$$

* Descubrió la relación entre la integracion y la diferenciacion, formulando el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual establece que la derivada de una integral devuelve la función original:

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = f(x)$$

* Trabajó con la idea de los diferenciales dx y dy, lo que permitió expresar cambios infinitesimales de manera algebraica. Introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada

Isaac Newton (1643 - 1727)

Fue un físico, matemático, astrónomo e inventor inglés, considerado una de las figuras más influyentes en la historia de la ciencia. Sus aportaciones al cálculo integral fueron.

* Desarrollo el calculo de forma independiente de Leibniz, aunque usaba una notacion diferente basada en fluyentes (funciones) y Fluxiones (derivadas)

* Descubrió que la derivación y la integracion son inversos (Teorema Fundamental de Cálculo)

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C$$

* Utilizó series infinitas para resolver integrales y calcular valores aproximados

* Aplicó el cálculo integral para encontrar áreas bajo la curva y volumenes sólidos de revolución

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)
Fue un matemático, astrónomo y físico alemán, sus contribuciones abarcan diversas áreas, incluyendo cálculo integral donde algunos de sus aportes fueron:

* Teorema de Gauss o Teorema de la Divergencia: Establece una relación entre la integral de superficie y la integral de volumen de un campo vectorial.

$$\iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV = \iint_S F \cdot dS$$

* Gauss investigó integrales elípticas, que son fundamentales en la teoría de ecuaciones diferenciales y geometría.

* Distribución normal (Campana de Gauss): Se usa para modelar la distribución de datos

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

* Aplicó el cálculo integral en geometría diferencial, estudiando curvas y superficies en espacios tridimensionales

LISTA DE COTEJO PARA INVESTIGACION DOCUMENTAL

DATOS GENERALES			
Nombre del alumno(a): Enrique Telona			
GRUPO:	201-A	CARRERA:	INGENIERIA Industrial

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA		NOMBRE DEL CURSO: CALCULO INTEGRAL
NOMBRE DEL DOCENTE: HUMBERTO VEGA MULATO		FIRMA DEL DOCENTE
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
PRODUCTO: Aportaciones del calculo intergal	FECHA: 23 de febrero del 2025	PERIODO ESCOLAR: FEBRERO-JUNIO 2025
INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN		
Revisar las actividades que se solicitan y marque con una X en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” escriba indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
1%	Presentación El trabajo cumple con los requisitos de: a. Buena presentación	X		
1%	b. Introducción	X		
1%	c. Ortografía	X		
1%	d. Desarrollo coherente del tema	X		
2%	e. citar fuentes de información	X		
2%	**Enfoque**: buscar información para dar respuestas satisfactorias a cuestionamientos sobre fenómenos, estudiar profundamente un problema a fin de obtener datos suficientes que permitan hacer ciertas proyecciones.	X		
10%	**Elaboración**: Debe partir de una selección adecuada de la información	X		
3%	**Responsabilidad**: Entregó la investigación documental en la fecha y hora señalada.	X		
20%	**CALIFICACIÓN**	20		

Problemario Calculo Integral

① $\sum_{i=1}^{6} (3i+2) = (3(1)+2) + (3(2)+2) + (3(3)+2) + (3(4)+2) + (3(5)+2) + (3(6)+2)$
$= 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = 75$

② $\sum_{k=3}^{9} (k^2+1) = (3^2+1) + (4^2+1) + (5^2+1) + (6^2+1) + (7^2+1) + (8^2+1) + (9^2+1)$
$= 10 + 17 + 26 + 37 + 50 + 65 + 82 = 287$

③ $\sum_{j=4}^{6} \frac{3}{j} = \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{6}\right) = 0.75 + 0.6 + 0.5 = 1.85$

④ $\sum_{i=1}^{4} [(i-1)^2 + (i+1)^3] = [(1-1)^2 + (1+1)^3] + [(2-1)^2 + (2+1)^3] + [(3-1)^2 + (3+1)^3] + [(4-1)^2 + (4+1)^3] =$

$= 8 + 28 + 68 + 134 = 238$

⑤ $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2+1} = \left(\frac{1}{0^2+1}\right) + \left(\frac{1}{1^2+1}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1}\right) + \left(\frac{1}{3^2+1}\right) + \left(\frac{1}{4^2+1}\right)$
$= 1 + 0.5 + 0.2 + 0.1 + 0.058 = 1.858$

Problemario Resuelve para $n = 10, 100, 1000$ y $10{,}000$

① $$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{n}{n^2}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{2}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \frac{n}{n^2} = \frac{n^2+n}{n^2} + \frac{n}{n^2} = \frac{n^2+2n}{n^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{n}$$

- Para $n = 10$ $\quad 1 + \frac{2}{10} = 1 + 0.2 = 1.2$

$n = 100$ $\quad 1 + \frac{2}{100} = 1.02$

$n = 1000$ $\quad 1 + \frac{2}{1000} = 1.002$

$n = 10000$ $\quad 1 + \frac{2}{10000} = 1.0002$

② $$\sum_{K=1}^{n} \frac{6K(K-1)}{n^3} = \frac{6K^2 - 6K}{n^3} = \frac{6}{n^3}\sum_{K=1}^{n} K^2 - \frac{6}{n^3}\sum_{K=1}^{n} K$$

$$\frac{6}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \frac{6}{n^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} - \frac{3n(n+1)}{n^3} = \frac{n(n+1)}{n^3}((2n+1)-3)$$

$$= \frac{n(n+1)}{n^3}(2n-2) = \frac{n(n+1)[2(n-1)]}{n^3} = \frac{2[(n+1)(n-1)]}{n^2}$$

$$= 2\frac{(n^2-1)}{n^2} = \frac{2n^2-2}{n^2} = 2 - \frac{2}{n^2}$$

- Para $n = 10$ $\quad 2 - \frac{2}{10^2} = 2 - \frac{2}{100} = 2 - 0.02 = 1.98$

$n = 100$ $\quad 2 - \frac{2}{100^2} = 2 - 0.0002 = 1.9998$

$n = 1000$ $\quad 2 - \frac{2}{1000^2} = 2 - 0.000002 = 1.999998$

$n = 10000$ $\quad 2 - \frac{2}{10000^2} = 2 - 0.00000002 = 1.99999998$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2(i-1)}{n^4} = \frac{4i^3 - 4i^2}{n^4} = \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{4}{n^4}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) - \frac{4}{n^4}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\frac{4n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{n^2+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

$$\frac{1}{n^2} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(4n+4)(2n+1)}{6n^3} = \frac{8n^2+4n+8n+4}{6n^3}$$

$$\frac{8n^2}{6n^3} + \frac{4n}{6n^3} + \frac{8n}{6n^3} + \frac{4}{6n^3} = \frac{8}{6n} + \frac{4}{6n^2} + \frac{8}{6n^2} + \frac{4}{6n^3}$$

$$= \frac{8}{6n} + \frac{12}{6n^2} + \frac{4}{6n^3}$$

Para 10 $\frac{8}{60} + \frac{12}{600} + \frac{4}{6000} = 0.13 + 0.2 + 0.00066 = 0.33066$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{4j+3}{n^2} \quad \frac{4}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{n^2} = \frac{3}{n^2}\sum_{j=1}^{n} 1$$

$$\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{3}{n^2}(n) = \frac{4n(n+1)}{2n^2} + \frac{3n}{n^2} = \frac{2(n+1)}{n} + \frac{3}{n}$$

$$\frac{2n+2}{n} + \frac{3}{n} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} = 2 + \frac{5}{n}$$

Para 10 $2 + \frac{5}{10} = 2.5$

100 $2 + \frac{5}{100} = 2.05$

1000 $2 + \frac{5}{1000} = 2.005$

10000 $2 + \frac{5}{10000} = 2.0005$

Problemario 19 02 25

Sean

ⓐ $f(x) = 2x$

$[1, 4]$

x	$f(x) = 2x$
1	2
2	4
3	6
4	8

$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = a + i\,\frac{\Delta}{x}$

$x_i = 1 + i\,\frac{3}{n}$

$x_i = 1 + \frac{3i}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} 2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} 2 + \frac{6i}{n}\Big)\frac{3}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} + \frac{18i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{18i}{n^2}$

$\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{18(n+1)}{2n} = \frac{9(n+1)}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} = \frac{6n}{n} = 6$

$= 6 + \frac{9(n+1)}{n}$

$\lim_{n \to \infty} \left(6 + 9\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = 6 + 9 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cancel{n}+1}{\cancel{n}}\right) = 6 + 9(1) = 15u^2$

② La region acotada por $y = 3x^4$, el eje x y la recta $x=1$

$y = 3x^4$

$\underset{a\ \ b}{[0,1]}$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$\sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{i}{n}\right)^4\left(\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{i^4}{n^4}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad \frac{3}{n^5}\sum i^4 = \frac{3}{n^5}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right)$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{3i^4}{n^5}$ $\quad = \frac{3(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30n^4}$

$= (3n+3)(2n+1) = \frac{6n^2+3n+6n+3}{30n^4}$

$= \frac{(6n^2+9n+3)(3n^2+3n-1)}{30n^4}$

$= \frac{18n^4+18n^3-6n^2+27n^3+27n^2-9n+9n^2+9n-3}{30n^4}$

$= \frac{18n^4+45n^3+30n^2-3}{30n^4} = \frac{18n^4}{30n^4} + \frac{45n^3}{30n^4} + \frac{30n^2}{30n^4} - \frac{3}{30n^4}$

$\lim_{n\to\infty}$ $\quad \frac{18}{30} + \frac{45n^3}{30n^4} + \frac{30n^2}{30n^4} - \frac{3}{30n^4}$

$\frac{18}{30} + 0 + 0 + 0 = \frac{18}{30}\,u^2$

③ $y = x^3$ $\quad$ $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{n} = \frac{3}{n}$

$[-1, 2]$

$x_i = -1 + i\,\frac{3}{n}$

$f(x_i) = \left(-1 + i\,\frac{3}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n}$

$-1 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}$

$-1 + \frac{3}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \cdot \frac{3n}{n} = -1 + \frac{3n(n+1)}{2n}\left(\frac{3n}{n}\right) = -1 + \frac{3(n+1)}{2}(3)$

$= -1 + \frac{3n+3}{2}(3) = -1 + \frac{9n+9}{2} = -1 + \frac{9n}{2} + \frac{9}{2} = -1 + \frac{9n}{2} + \frac{9}{2} = -1 + \frac{9n}{2} + 4.5$

$= 3.5 + \frac{9n}{2}$

$\lim_{n \to \infty} 3.5 + \frac{9n}{2} = 3.5 + \frac{9(\infty)}{2} = 3.5 + 0 = 3.5$

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: **HUMBERTO VEGA MULATO**			ASIGNATURA: Cálculo Integral
		DATOS GENER ALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN	
		NOMBRE DEL ALUMNO: José Enrique Telona Zetina	**UNIDAD: Uno**
PERIODO: febrero-junio2025	**GRUPO:201-A**		**FECHA DE ENTREGA: 25 de febrero 2025**
		INSTRUCCIONES	
		Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.	

VALOR DEL REACTIVO		**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
			SI	**NO**	
1%		**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	X		
1%		**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
4%		**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
2%		**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
2%		**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
10%		**CALIFICACIÓN**	10		

José Enrique Telona Cetina

Problemario 2/2

03/03/25

① $\int_1^2 (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

$= \int_1^2 3x^2\,dx - \int_1^2 4x\,dx - \int_1^2 dx$

$= 3\int_1^2 x^2 dx - 4\int_1^2 x\,dx - \int_1^2 dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - x$

$= x^3 - 2x^2 - x \Big|_1^2$

$= [(2)^3 - 2(2)^2 - (2)] - [(1)^3 - 2(1)^2 - (1)]$

$= (8 - 8 - 2) - (1 - 2 - 1)$

$= (-2) - (-2) = -2 + 2 = 0$

② $\int_2^{-1} (2x+1)^2\,dx$

$= \int_2^{-1} (4x^2 + 4x + 1)\,dx = -\int_1^2 (4x^2 + 4x + 1)\,dx$

$= -4\int_1^2 x^2 - 4\int_1^2 x - \int_1^2 dx$

$= -\frac{4x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - x = -\frac{4x^3}{3} - 2x^2 - x \Big|_{-1}^2$

$= \left(-\frac{4(2)^3}{3} - 2(2)^2 - 2\right) - \left(\frac{-4(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 - (-1)\right)$

$= -\frac{32}{3} - 8 - 2 - \left(\frac{4}{3} - 2 + 1\right) = \frac{-32}{3} - 8 - 2 - \frac{4}{3} + 2 - 1$

$= \frac{-36}{3} - 9 = -12 - 9 = -21$

(3) $\int_{-1}^{2} (5x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})\,dx$

$= 5\int_{-1}^{2} x^2 + \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} dx$

$= \frac{5x^3}{3} + \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}) - \frac{x}{2} = \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} \Big|_{-1}^{2}$

$= \frac{5(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{6} - \frac{(2)}{2} - (\frac{5(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{6} - \frac{(-1)}{2})$

$= \frac{40}{3} + \frac{2}{3} - 1 - (\frac{-5}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2})$

$= \frac{40}{3} + \frac{2}{3} - 1 + (\frac{5}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2})$

$= \frac{42}{3} - 1 + (\frac{10}{6} - \frac{1}{6} - \frac{3}{6})$

$= \frac{42}{3} - 1 + 1 = \frac{42}{3} = 14$

(4) $\int_{3}^{7} 2x\,dx$

$= 2\int_{3}^{7} x\,dx$

$= 2\frac{x^2}{2} = x^2 \Big|_{3}^{7}$

$= (7)^2 - (3)^2$

$= 49 - 9$

$= 40$

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: **HUMBERTO VEGA MULATO**			ASIGNATURA: Cálculo Integral
	DATOS GENER ALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
	NOMBRE DEL ALUMNO: José Enrique Telona Zetina	**UNIDAD: Uno**	
PERIODO: febrero-junio2025	**GRUPO:201-A**		**FECHA DE ENTREGA: 3de marzo 2025**
	INSTRUCCIONES		
	Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO		**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
			SI	**NO**	
5%		**PRESENTACIÓN:** El trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	X		
5%		**FORMATO DE ENTREGA**: Hoja de presentación (asignatura, unidad, tema de estudio, docente, fecha, nombre del alumno), fuente de información, lista de cotejo con datos correspondientes y presentar en su cuadernillo de tareas.	X		
5%		**DESARROLLO DE EJERCICIOS**: Identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar: Enunciado, datos, fórmula, sustitución y resultado.	X		
5%		**RESULTADO:** El alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades y presenta la interpretación lógica de cada resultado obtenido en una conclusión.	X		
10%		**RESPONSABILIDAD**: Entregó el problemario en la fecha y hora señalada.	X		
30%		**CALIFICACIÓN**	30		

José Enrique Telona Cetina

25/02/25

$\int_{0}^{2} 3x(x-4)\,dx$ (with b = 2 and a = 0 written beside the limits)

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$

20%

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2i}{n}-4\right)\right]\frac{2}{n} = \left[\frac{6i}{n}\left(\frac{2i}{n}-4\right)\right]\frac{2}{n} = \left(\frac{12i^2}{n^2}-\frac{24i}{n}\right)\frac{2}{n}$

$= \frac{24i^2}{n^3} - \frac{48i}{n} = \frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{48}{n}\sum_{i=1}^{n} i$

$= \frac{24}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - \frac{48}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2n}\right)$

$= \frac{24n(n+1)(2n+1)}{6n^3} - \frac{48n(n+1)}{2n^2} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2} - \frac{24(n+1)}{n}$

$= \frac{4n+4(2n+1)}{n^2} - \frac{24n+24}{n}$

$= \frac{8n^2+4n+8n+4}{n^2} - \frac{24n+24}{n}$

$=$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

↙ Este es el bueno

José Enrique Telora Tetina

27/02/25

20%

$\int_{2}^{-1} (2x+1)^2\,dx$

$\int_{2}^{-1} (4x^2+4x+1)\,dx$

$4\int_{2}^{-1} x^2dx + 4\int_{2}^{-1} x\,dx + 1\int_{2}^{-1} dx$ dx

$4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 1x\,dx)$

$4\frac{x^3}{3}\Big|_{2}^{-1} + 4\frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{-1} + x\Big|_{2}^{-1}$

$4\frac{(-1)^3}{3} + 4\frac{(-1)^2}{2} + (-1) \quad - \left(4\frac{(2)^3}{3} + 4\frac{(2)^2}{2} + (2)\right)$

$-\frac{4}{3} + \frac{4}{2} - 1 \quad - \left(\frac{32}{3} + \frac{16}{2} + 2\right)$

$-\frac{4}{3} + \frac{4}{2} - 1 - \frac{32}{3} - \frac{16}{2} - 2$

$-\frac{36}{3} - \frac{12}{2} - 3$

$-\frac{72}{6} - \frac{36}{6} - 3$

$\frac{-108}{6} - 3$

$-18 - 3 = 21$

Si a es mayor que b

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$

$-(-21) = 21$