INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

EVALUACIÓN ESCRITA DE LA UNIDAD II

NOMBRE DEL DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: Evelyn de los Ángeles López Ávila		CARRERA: Ingeniería informática
GRUPO: 210 A	FECHA: 9 - Mayo - 2025	PERIODO ESCOLAR: FEBRERO-JUNIO 2025
INSTRUCCIONES		
Lea cuidadosamente y conteste correctamente lo que se te solicita. El tiempo para responder es de 50 minutos. Si tiene alguna duda sobre lo que se te solicita pregunta al docente. Se puede utilizar calculadora y formulario.		

Resolver la siguiente integral utilizando el método de integración por partes.

$$\int \frac{7}{5} x e^{4x} dx = e^{4x}\left(\frac{7}{20}x - \frac{7}{80}\right) + C$$

PORCENTAJE OBTENIDO:50%

Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{2}{5} sen^3 4x cos^4 4x dx = \frac{-(\cos 4x)^5}{50} + \left(\frac{\cos 4x)^7}{70}\right.$$

1) $\int \frac{7}{5} x e^{4x} dx$

$u = \frac{7}{5} x \quad dv = e^{4x} dx$

$du = \frac{7}{5} dx$

$\int dv = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4}$

$v = \frac{e^{4x}}{4}$

Fórmula:

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int \frac{7}{5} x e^{4x} dx = \left(\frac{7}{5} x\right)\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) - \int \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)\left(\frac{7}{5} dx\right)$

$= \frac{7}{20} x e^{4x} - \int \frac{7}{20} e^{4x} dx$

$= \frac{7}{20} x e^{4x} - \frac{7}{20} \int e^{4x} dx$

$= \frac{7}{20} x e^{4x} - \frac{7}{20}\left(\frac{1 e^{4x}}{4}\right) + c$

$= \frac{7}{20} x e^{4x} - \frac{7}{80} e^{4x} + c$

$y = \frac{7}{20} x e^{4x} - \frac{7}{80} e^{4x} + c$

$y = e^{4x}\left(\frac{7}{20} x - \frac{7}{80}\right) + c$

2) $\int \frac{2}{5} \operatorname{sen}^3 4x \cos^4 4x dx$

$\frac{2}{5} \int (\operatorname{sen} 4x)^3 (\cos 4x)^4 dx$

$\frac{2}{5} \int \operatorname{sen}^2 4x (\operatorname{sen} 4x) \cos^4 4x dx$

$\frac{2}{5} \int (1 - \cos^2 4x) \cos^4 4x \operatorname{sen} 4x dx$

$\frac{2}{5} \int \cos^4 4x \operatorname{sen} 4x dx - \cos^6 4x \operatorname{sen} 4x dx$

$\frac{2}{5} \int (\cos 4x)^4 \operatorname{sen} 4x dx - \int (\cos 4x)^6 \operatorname{sen} 4x$

Integral 1

$\frac{2}{5}\int (\cos 4x)^4 \operatorname{Sen} 4x\,dx$

$u = -\cos 4x$

$n = 4$

$\frac{du}{dx} = -4 \operatorname{sen} 4x$

$\frac{du}{-4} = \operatorname{Sen} 4x\,dx$

$\frac{2}{5}\int \cos^4 4x \operatorname{sen} 4x\,dx = \frac{2}{5}\int (\cos 4x)^4 \operatorname{sen} 4x\,dx$

$= \frac{2}{5}\int (\cos 4x)^4 \operatorname{sen} 4x\,dx$

$= \frac{2}{5}\int (u)^4 \left(\frac{du}{-4}\right)$

$= \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)\int u^4 du = \left(-\frac{1}{10}\right)\frac{u^{4+1}}{4+1}$

$= \left(-\frac{1}{10}\right)\frac{u^5}{5} = \frac{-u^5}{50}$

$\int \cos^4 4x \operatorname{sen} 4x\,dx = \frac{-(\cos 4x)^5}{50}$

Integral 2

$\frac{2}{5} - \int (\cos 4x)^6 \operatorname{sen} 4x\,dx$

$u = \cos 4x$

$n = 6$

$\frac{du}{dx} = -4 \operatorname{sen} 4x$

$\frac{du}{-4} = \operatorname{sen} 4x\,dx$

$\frac{2}{5} - \int \cos^6 4x \operatorname{sen} 4x\,dx = \int (\cos 4x)^6 \operatorname{sen} 4x\,dx$

$= \int (\cos 4x)^6 \operatorname{sen} 4x\,dx$

$= \int (u)^6 \left(\frac{du}{-4}\right)$

$= \left(\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{4}\right)\right)\int u^6 du = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{u^{6+1}}{6+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{u^7}{7}\right) = \frac{u^7}{70}$

$= \frac{(\cos 4x)^7}{70} + C$

$\int \frac{2}{5} \operatorname{sen}^3 4x \cos^4 4x\,dx$

$\frac{2}{5}\int (\cos^4) 4x \operatorname{sen} 4x\,dx - \int (\cos 4x)^6 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{(\cos 4x)^5}{50} + \frac{(\cos 4x)^7}{70} + C$

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

LISTA DE COTEJO DE INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL

DOCENTE: PABLO PROMOTOR CAMPECHANO	ASIGNATURA: CÁLCULO INTEGRAL	
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO(A): LÓPEZ ÁVILA EVELYN DE LOS ÁNGELES	UNIDAD: II	
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2025	GRUPO: 210 A	FECHA DE ENTREGA: 6/05/2025
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados “SI” cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque “NO”. En la columna “OBSERVACIONES” indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)	CUMPLE		OBSERVACIONES
		SI	NO	
5%	**Presentación:** la investigación cumple con los requisitos de: **a.** Buena presentación **b.** Letra legible **c.** Limpieza y orden **d.** Ortografía (El documento es redactado de forma correcta sin faltas de ortografía). **e.** Contiene índice	√		
2%	**Formato de entrega**: hoja de presentación (nombre de la escuela, carrera, asignatura, unidad, tema de estudio, nombre del alumno, grupo, docente y fecha).	√		
3%	**Introducción**: da una idea clara y objetiva de lo que tratara el tema (motivando al lector a continuar con su lectura y revisión), fundamentando con las fuentes de información que se utilizaron para su redacción.	√		
5%	**Contenido**: maneja un lenguaje técnico apropiado y presenta en todo el documento coherencia, secuencia entre párrafos, es digerible a todo público y presenta una metodología.	√		
3%	**Conclusiones**: las conclusiones son claras y acordes con el objetivo esperado.	√		
2%	**Responsabilidad**: entregó la investigación documental en la fecha señalada.	√		
20%	CALIFICACIÓN	20%		

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE SAN ANDRÉS TUXTLA

LISTA DE COTEJO DE PROBLEMARIO

DOCENTE: ING. PABLO PROMOTOR CAMPECHANO		ASIGNATURA: CÁLCULO INTEGRAL
DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN		
NOMBRE DEL ALUMNO (A): LÓPEZ ÁVILA EVELYN DE LOS ÁNGELES		Problemario de la Unidad: 2
PERIODO: FEBRERO-JUNIO 2025	GRUPO: 210 A	FECHA DE ENTREGA: 6/05/2025
INSTRUCCIONES		
Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.		

VALOR DEL REACTIVO	**CARACTERÍSTICA A CUMPLIR (REACTIVO)**	**CUMPLE**		**OBSERVACIONES**
		SI	**NO**	
5 %	**Presentación: e**l trabajo cumple con los requisitos de **a.** Buena presentación **b.** No tiene faltas de ortografía **c.** Ordenado y limpio	√		
5 %	**Formato de entrega**: hoja de presentación (nombre de la escuela, carrera, asignatura, unidad, tema de estudio, nombre del alumno, grupo, docente y fecha).	√		
10 %	**Desarrollo de ejercicios**: identifica los principios, leyes, normas e incluso técnicas y metodologías apropiadas, si el ejercicio lo permite, debe de presentar datos, fórmula, sustitución y resultado.	√		
5 %	**RESULTADO:** el alumno llega al resultado correcto, con sus respectivas unidades.	√		
5 %	**RESPONSABILIDAD**: entregó el problemario en la fecha señalada.	√		
30 %	**CALIFICACIÓN**	30%		

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR

DE SAN ANDRÉS TUXTLA

INVESTIGACIÓN UNIDAD 2

INTEGRANTES:

Irving Zuriel Fiscal Cobix.

Evelyn de los Ángeles López Ávila.

Irma Joselin Pérez García.

Brian Reyes Carvajal.

Isis del Carmen Toto Pucheta.

CARRERA: Ingeniería informática.

DOCENTE: Pablo Promotor Campechano.

MATERIA: Cálculo integral.

GRUPO: 210 A

FECHA DE ENTREGA: 06/05/2025

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el cálculo integral es una parte muy importante de las matemáticas, ya que nos permite resolver problemas relacionados con áreas, volúmenes, longitudes de curvas, y muchas otras situaciones reales. Conforme va aumentando la complejidad de los problemas, también lo hacen las integrales que hay que resolver, por lo que se han desarrollado diferentes métodos para poder abordarlas de manera más efectiva, siendo así que sean más sencillo de entenderlas y resolverlas.

En el presente trabajo vamos a enfocarnos en cuatro de los métodos más utilizados para resolver integrales complicadas: integración por partes, integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica y fracciones parciales. Cada uno de estos métodos tiene una lógica diferente y se usa en situaciones particulares, dependiendo de la forma que tenga la función que vamos a integrar. La idea es explicar en qué consiste cada método, cuándo conviene aplicarlo, y cómo se realiza paso a paso, todo acompañado con ejemplos prácticos que ayuden a entender mejor su uso y aplicación.

Por ejemplo, la integración por partes es útil cuando tenemos una multiplicación de funciones que no se pueden integrar fácilmente con métodos básicos. En cambio, las integrales trigonométricas requieren el uso de identidades para simplificar expresiones con senos y cosenos. La sustitución trigonométrica es muy útil cuando en la integral aparece una raíz cuadrada con sumas o restas, y el método de fracciones parciales nos permite descomponer funciones racionales en fracciones más simples que son más fáciles de integrar.

Lo que buscamos con esta investigación es facilitar la comprensión de estos métodos, explicando de forma sencilla cómo se usan y en qué situaciones se aplican mejor.

DESARROLLO

2.3.3 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

¿Qué es la integración por partes?

La integración por partes es una técnica de cálculo integral que invierte la regla del producto de la derivada. Su fórmula general (derivada de la identidad $(fg)' = f'g + fg')$) es:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

donde $u\ y\ dv$ son funciones diferenciables de la variable de integración. Es decir, si $u = f(x)\ y\ dv = g'(x)\ dxdv = g'(x)dx\ (con\ v = g(x)v = g(x))$, entonces

∫f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)−∫f'(x)g(x)dx.

Esta fórmula requiere que las funciones involucradas tengan derivadas continuas. La ventaja del método es transformar la integral original en otra más fácil, al costo de restar una nueva integral.

¿Cuándo aplicar el método?

La integración por partes se aplica cuando el integrando es un producto (o cociente transformable en producto) de dos funciones diferenciables. En particular, conviene usarlo si podemos separar el integrando como $u \cdot dv$ de modo que du y la antiderivada v sean sencillas de calcular. En la práctica $u\ y\ vv$ deben tener derivadas continuas.

Por ejemplo, es común en integrales de formas como funciones polinómicas multiplicadas por logaritmos, o exponenciales multiplicadas por trigonométricas, etc., ya que la derivación del polinomio o logaritmo simplifica la expresión. Si no hay un producto claro, puede intentarse escribir el integrando como $f(x) \cdot g'(x)dx$ e identificar $u = f(x),\ dv = g'(x)\ dxdv = g'(x)dx$.

El método general consta de los siguientes pasos:

1. Verificar que el integrando es un producto de funciones diferenciables (o reorganizarlo para que lo sea).
2. Elegir u y $dvdv$. Según el criterio LIATE se suele tomar u como la función más "fuerte" (logarítmica, inversa trig., algebraica, trig, o exponencial, por ese orden) para simplificar al derivarla. El resto de la expresión es dv.
3. Calcular du y vv: derivar u para obtener du, e integrar du para obtener v.
4. Aplicar la fórmula: sustraer la integral $\int vdu$ de $u\ vuv$, es decir

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Esta elección estratégica de v busca que la nueva integral ∫*v du* sea más sencilla que la original. En resumen, se elige v de modo que al derivarla el resultado sea "más simple" y se elige *du* de lo que queda para poder integrar fácilmente.

¿Dónde se aplica la integración por partes?

Entre los productos de funciones donde se aplica frecuentemente la integración por partes destacan:

- Funciones polinómicas × logarítmicas, por ejemplo $\int xnln(x)dx$
- Funciones exponenciales × trigonométricas, por ejemplo:

  $\int e^x cos(x)dx\ \ o\ \ \int e^x sin\,(x)\,dx.$
- Funciones polinómicas × exponenciales, por ejemplo $\int x^n e^x\,dx.$

A continuación, se resuelve un ejemplo paso a paso en cada caso:

Ejemplo 1: Integral de función polinómica por logarítmica

Calcular $\int xln(x)dx$

1. Elegimos $u = ln(x)\ y\ dv = x\ dxdv = xdx$. (La derivada de $ln(x)$ simplifica la expresión, y es fácil integrar x.) Entonces

$du = \frac{1}{x}dx\ \ y\ \ v = \int x\ dx = \frac{x^2}{2}$

2. Aplicamos la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int xln(x)dx = (ln(x)) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

3. Simplificamos la integral restante: $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$. Así,

$$\int xln(x)dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{1}{2} \int xdx$$

4. Integramos $\int xdx$: $\int x\ dx = \frac{x^2}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Por lo tanto,

$$xln(x)dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

donde C es la constante de integración. Así hemos resuelto el caso de un polinomio por logaritmo.

Ejemplo 2: Integral de exponencial por trigonométrica

Calcular $\int e^x cos(x)dx$.

1. Sea $I = \int e^x cos(x)dx$. Elegimos $u = e^x\ y\ dv = cos\ (x)\ dxdv = cos(x)dx$. Entonces $du = e^x dx\ y\ v = \int cos\ (x)\ dx = sin\ (x)v$

2. Aplicamos la fórmula: $I = exsin(x) - \int sin(x)exdx$.

Denotamos $J = \int exsin(x)dx. Así,\ I = exsin\ (x) - JI$.

3. Ahora integramos $J = \int e^x sin(x)dx$ por partes: elegimos de nuevo

$u = ex,\ dv = sin\ (x)\ dx$.

Entonces $du = exdx,\ v = -cos\ (x)$

Aplicando la fórmula:

$$J = e^x\left(-cos(x)\right) - \int \left(-cos(x)\right)e^x dx = -e^x cos(x) + \int e^x cos(x)dx$$

Pero $\int e^x cos(x)dx = I$. Luego $J = -e^x cos\ (x) + I$

4. Sustituimos J en la expresión de I:

$$I = e^x sin(x) - J = e^x sin(x) - (-e^x cos(x) + I) = e^x sin(x) + e^x cos(x) - I$$

Pasando I al otro lado: $2I = e^x(sin(x) + cos(x))$.

5. Despejamos I:

$$I = \int e^x cos(x)dx = \frac{e^x}{2}(sin(x) + cos(x)) + C$$

Este es el resultado de la integral. La clave fue aplicar integración por partes dos veces y resolver la ecuación lineal resultante en I.

Ejemplo 3: Integral de función polinómica por exponencial

Calcular $\int x^2 e^x dx$.

1. Sea $I = \int x^2 e^x dx$. Elegimos $u = x^2$ (polinomio) y $dv = e^x dx$ (exponencial). Entonces $du = 2xdx\ y\ v = \int e^x\ dx = e^x$.

2. Aplicando la fórmula:

$$I = x^2 e^x - \int (e^x) \cdot (x^2) dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

Denotamos $K = \int xe^x dx.\ Así,\ I = x^2 e^x - 2KI$.

3. Para $K = \int xe^x dx$, aplicamos de nuevo partes: tomamos

$u = x,\ dv = e^x dv = e^x dx$. Entonces $du = dx,\ v = e^x$.

La fórmula da:

$$K = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

4. Sustituimos K en la expresión de I:

$$I = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Factorizamos:

$$\int x^2e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Este es el resultado de la integral de x^2e^x. En resumen, aplicamos integración por partes dos veces para reducir el grado del polinomio.

2.3.4 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS QUE CONTIENEN POTENCIAS DEL SENO, COSENO, TANGENTE Y SECANTE.

¿Qué tipo de integrales se pueden resolver por este método y cuáles son las identidades trigonométricas que se utilizan en este método?

Las integrales trigonométricas que involucran potencias de seno, coseno, tangente y secante se resuelven con métodos específicos según la paridad de los exponentes y las identidades trigonométricas aplicadas:

1. Integrales con potencias de seno y coseno

Caso 1: Exponente impar en seno o coseno
Si uno de los exponentes es impar $\int sin^3x \cdot cos^2x\, dx$, se separa una potencia impar y se usa la identidad pitagórica $sin^2x + cos^2x = 1$ para reescribir el término restante. Luego se aplica sustitución.

Ejemplo:

$$\int cos^3x\, dx = \int (1 - sin^2x) cos\, x\, dx, con\, u = sin\ x$$

Caso 2: Exponentes pares en ambos
Si ambos exponentes son pares, se usan identidades de ángulo mitad:

$$sin^2x = \frac{1 - cos^2x}{2}\ \ y\, cos^2x = \frac{1 + cos^2x}{2}$$

2. Integrales con potencias de tangente y secante

Caso 1: Exponente par en secante
Se separa sec^2x y se usa la identidad $sec^2\, x = 1 + tan^2$, seguido de sustitución $u = tan\ x$

Caso 2: Exponente impar en tangente. Se separa $sec\ x\ tan\ x$ y se emplea $tan^2x = sec^2x - 1$, con sustitución $u = secx$.

Identidades clave

- Pitagóricas:

$$sin^2x + cos^2x = 1,\ 1 + tan^2\,x = sec^2\,x$$

- Ángulo mitad:

$$sin^2x = \frac{1 - cos^2x}{2},\ cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

Estos métodos permiten transformar integrales complejas en formas polinómicas integrables mediante sustitución simple.

¿Cuáles son las tres estrategias para evaluar integrales que contienen potencias del seno y coseno?

Las integrales que involucran potencias de seno y coseno se resuelven mediante tres estrategias clave, dependiendo de la paridad de los exponentes:

1. Potencia impar en seno

Estrategia: Separar un factor $sin\,x$, usar $sin^2x = 1 - cos^2x$ y sustituir $u = cos\,x$
Ejemplo:

$$\int sin^3x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot cos^2x \cdot sinxdx = \int (1 - cos^2x)cos^2x \cdot sinxdx$$

Sustitución: $u = cos\,x,\ du = -sin\ x\,dx$:

$$-\int (1 - u^2)u^2du = -\int (u^2 - u^4)du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{cos^3x}{3} + \frac{cos^5x}{5} + C$$

2. Potencia impar en coseno

Estrategia: Separar un factor $cos\,x$, usar $cos^2x = 1 - sin^2x$ y sustituir $u = sinx$.
Ejemplo:

$$\int cos^5xdx = \int cos^4x \cdot cosxdx = \int (1 - sin^2x)^2 \cdot cosxdx$$

Sustitución: $u = sinx,\ du = cos\ \ x\,dx$:

$$\int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4)du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = sinx - \frac{2sin^3x}{3} + \frac{sin^5x}{5} + C$$

3. Ambas potencias pares

Estrategia: Usar identidades de ángulo mitad:

$$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}, cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$$

Ejemplo:

$$\int sin^2x \cdot cos^2xdx = \int (\frac{1-cos2x}{2})(\frac{1+cos2x}{2})dx = \frac{1}{4}\int (1-cos^2 2x)dx$$

Aplicar identidad nuevamente a $cos^2 2x$

$$\frac{1}{4}\int (1-\frac{1+cos4x}{2})dx = \frac{1}{8}\int (1-cos4x)dx = \frac{x}{8} - \frac{sin4x}{32} + C$$

Identidades clave:

- $sin^2x + cos^2x = 1$
- Ángulo mitad: $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2},\ cos^2x = \frac{1+co\,s\,2x}{2}$

¿Cuáles son las cinco estrategias para evaluar integrales que contienen potencias de la tangente y la secante?

Las integrales que contienen potencias de tangente y secante se resuelven con cinco estrategias principales, según la paridad de los exponentes y las identidades trigonométricas usadas:

1. Exponente par en secante

Estrategia: Separar un factor $sec^2 x$ y usar la identidad $sec^2 x = 1 + tan^2 x$ para convertir el resto en potencias de tangente. Luego, sustituir $u = tanx$.
Ejemplo:

$$\int tan\, x\, sec^4\, x\, dx$$

Separar $sec^2\, x$:

$$\int tanx\, sec^2\, x\, sec^2 x\, dx = \int tanx\, sec^2 x(1 + tan^2 x)dx$$

Con $u = tanx,\ du = sec^2 xdx$:

$$\int u(1 + u^2)du = \int (u + u^3)du = \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + C = \frac{tan^2 x}{2} + \frac{tan^4 x}{4} + C$$

2. Exponente impar en tangente

Estrategia: Separar un factor $tanxsecx$ y usar $tan^2 x = sec^2 x - 1$ para convertir potencias de tangente en secante. Luego, sustituir $u = secx$.
Ejemplo:

$$\int tan^3 x\, sec^5 x\, dx$$

Separar $tanxsecx$:

$$\int tanx\, secx\, tan^2 x\, sec^4 x\, dx = \int tanxsecx(sec^2 x - 1)sec^4 x\, dx$$

Con $u = secx,\ du = sec\ \ xtan\ \ xdx$:

$$\int u(sec^2 x - 1)u^4 dx = \int u^5(u^2 - 1)du = \int (u^7 - u^5)du = \frac{u^8}{8} - \frac{u^6}{6} + C = \frac{sec^8 x}{8} - \frac{sec^6 x}{6} + C$$

3. Exponente impar en secante y tangente par o ausente

Estrategia: Usar integración por partes, considerando que la derivada de $tanx$ es sec^2x y la de $secx$ es $secxtanx$.
Ejemplo:

$$\int sec^3xdx$$

Se usa integración por partes:

$u = secx, dv = sec^2xdx$

Entonces:

$du = secxtanxdx, v = tanx$

La integral queda:

$secxtanx - \int secxtan^2xdx = secxtanx - \int secx(sec^2x - 1)dx = secxtanx - \int sec^3xdx + \int secxdx$

Despejando:

$2\int sec^3xdx = secxtanx + ln \mid secx + tanx \mid + C$

Por lo tanto:

$\int sec^3xdx = \frac{1}{2}secxtanx + \frac{1}{2}ln \mid secx + tanx \mid + C$

4. Tangente con exponente par y secante con exponente impar

Estrategia: Convertir $tan^2x\, en\, sec^2x - 1$ en y usar integración por partes para la secante impar.
Ejemplo:

$\int tan^2xsec^3xdx$

Convertir:

$\int (sec^2x - 1)sec^3xdx = \int sec^5xdx - \int sec^3xdx$

Ambas integrales se resuelven por partes como en el caso anterior.

5. Tangente y secante con exponentes pares

Estrategia: Usar identidades para reducir potencias:

$tan^2x = sec^2x - 1, sec^2x = 1 + tan^2x$

y luego sustituir para simplificar la integral.
Ejemplo:

$\int tan^2xsec^2xdx$

Sustituir $tan^2x = sec^2x - 1$:

$\int (sec^2x - 1)sec^2xdx = \int sec^4\, xdx - \int sec^2xdx$

La integral de sec^2x es directa, y la de $sec^4\, x$ se puede resolver usando reducción de potencias o integración por partes.

Estas cinco estrategias permiten abordar la mayoría de integrales con potencias de tangente y secante de forma sistemática y eficiente.

2.3.5 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

Exploramos las integrales que contienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde los valores de α son positivos. La técnica de la sustitución trigonométrica es muy útil para evaluar estas integrales. Esta técnica utiliza la sustitución para reescribir estas integrales como integrales trigonométricas.

Integrales que implican $\boldsymbol{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Antes de desarrollar una estrategia general para las integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$ considere la integral $\int \sqrt{9 - x^2}\ dx$. Esta integral no puede evaluarse con ninguna de las técnicas sobre las que hemos hablado hasta ahora. Sin embargo, si hacemos la sustitución x = $x = 3sen0$, tenemos $dx = 3cos0d0$. Después de sustituir en la integral, tenemos

$\boldsymbol{\int \sqrt{9 - x^2}\ dx}$ **=** $\boldsymbol{\int \sqrt{9 - (3sen0)^2}\, 3cos0d0.}$

Tras simplificar, tenemos

$\boldsymbol{\int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \int \sqrt[9]{1 - sen^2 0}\ cos0d0.}$

Supongamos que $\boldsymbol{1 - sen^2 0 = cos^2 0}$, ahora tenemos

$\boldsymbol{\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int \sqrt[9]{cos^2 0}\, cos0d0}$.

Suponiendo que $\boldsymbol{cos\, 0 \geq 0}$, tenemos

$\boldsymbol{\int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \int 9cos^2 0d0.}$

En este punto, podemos evaluar la integral utilizando las técnicas desarrolladas para integrar potencias y productos de funciones trigonométricas.

Integración de expresiones que implican $\boldsymbol{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Para las integrales que contienen $\sqrt{\boldsymbol{a^2 + x^2}}$, consideremos primero el dominio de esta expresión. Dado que $\sqrt{\boldsymbol{a^2 + x^2}}$ se define para todos los valores reales de $\boldsymbol{x}$, limitamos nuestra elección a aquellas funciones trigonométricas que tienen un rango de todos los números reales. Por lo tanto, nuestra elección se limita a seleccionar $\boldsymbol{x = a \tan 0}$ o $\boldsymbol{x = a \cot 0}$. Cualquiera de estas sustituciones podría funcionar, pero la sustitución estándar e**s** $\boldsymbol{x = a \tan 0}$ o, de forma equivalente, $\boldsymbol{tan0 = x/a}$. Con esta sustitución, suponemos que $-(\boldsymbol{\pi/2}) < \boldsymbol{0} < \boldsymbol{\pi/2}$, por lo que también tenemos $\boldsymbol{0 = tan^{-1}}\,(\boldsymbol{x/a})$. El procedimiento para utilizar esta sustitución se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

1. Compruebe si la integral se puede evaluar fácilmente utilizando otro método. En algunos casos, es más conveniente utilizar un método alternativo.

2. Sustituya $\boldsymbol{x = atan0}$ y $\boldsymbol{dx = asec^2 0d0}$. Esta sustitución da como resultado $\sqrt{\boldsymbol{a^2 + x^2}} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + (atan0)^2}} = \sqrt{\boldsymbol{a^2\,(1 + tan^2 0)}} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 sec^2 0}} =$ $|\boldsymbol{asec0}| = \boldsymbol{asec0}$. (Dado que $-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} < \boldsymbol{0} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ y $\boldsymbol{sec0 > 0}$ en este intervalo, $|\boldsymbol{asec0}| = \boldsymbol{asec0}$.)

3. Simplifique la expresión.

4. Evalúe la integral utilizando las técnicas de la sección de integrales trigonométricas.

5. Utilice el triángulo de referencia de la Figura 1 para reescribir el resultado en términos de $\boldsymbol{x}$. Es posible que también tenga que utilizar algunas identidades trigonométricas y la relación $0 = \boldsymbol{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right)$. (Nota: El triángulo de referencia se basa en la suposición de que $\boldsymbol{x > 0}$; sin embargo, las razones trigonométricas producidas a partir del triángulo de referencia son las mismas que las razones para las que $\boldsymbol{x \leq 0}$.

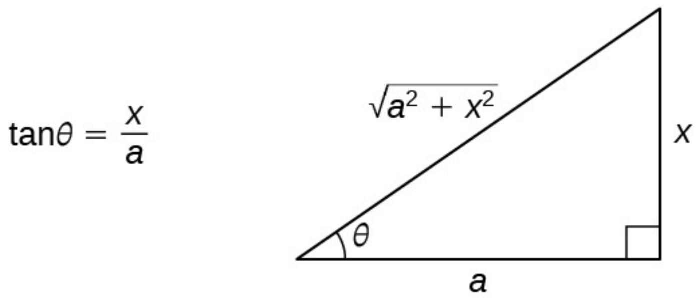

Figura 1

Integración de expresiones que implican $\sqrt{x^2 - a^2}$

El dominio de la expresión $\sqrt{x^2 - a^2}$ es $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. Por lo tanto, o bien $x \leq -a$ o $x \geq a$. Por lo tanto, $\frac{x}{a} \leq -1$ o $\frac{x}{a} \geq 1$. Dado que estos intervalos corresponden al rango de $sec\,0$ en el conjunto $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, tiene sentido utilizar la sustitución $sec\,0 = \frac{x}{a}$ o, de forma equivalente, $x = asec0$, donde $0 \leq 0 < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2} < 0 \leq \pi$. La sustitución correspondiente para dx es $dx = asec0tan0d0$. El procedimiento para utilizar esta sustitución se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

1. Compruebe si la integral no se puede evaluar utilizando otro método. Si es así, podemos considerar la aplicación de una técnica alternativa.

2. Sustituya $x = asec0$ y $dx = asec0tan0d0$. Esta sustitución da produce

$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(asec0)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\,(sec^2 0 - 1} = \sqrt{a^2 tan^2 0} = |atan0|$.
Para $x \geq a, |atan0| = atan0$ y para $x \leq -a, |atan0| = -atan0$.

3. Simplifique la expresión.

4. Evalúe la integral utilizando las técnicas de la sección de integrales trigonométricas.

5. Utilice los triángulos de referencia de la Figura 2 para reescribir el resultado en términos de $\boldsymbol{x}$. Es posible que también tenga que utilizar algunas identidades trigonométricas y la relación $\mathbf{0} = \boldsymbol{sec^{-1}}(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}})$. (Nota: Necesitamos ambos triángulos de referencia, ya que los valores de algunas de las razones trigonométricas son diferentes dependiendo de si $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{a}$.)

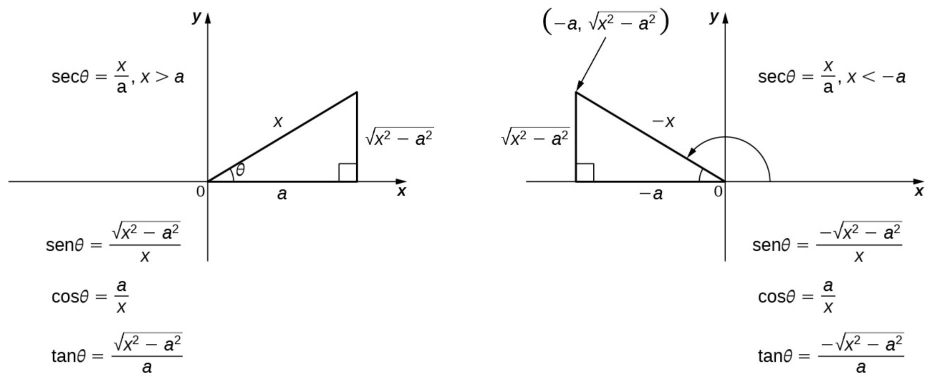

Figura 2

3 casos en los que se aplica este método.

El método de sustitución trigonométrica consiste en resolver integrales que contienen términos de la forma:

$$\sqrt{\boldsymbol{a^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2 - a^2}}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2 + a^2}}$$

Caso 1: Integrales de la forma: $\sqrt{a^2 - x^2}$

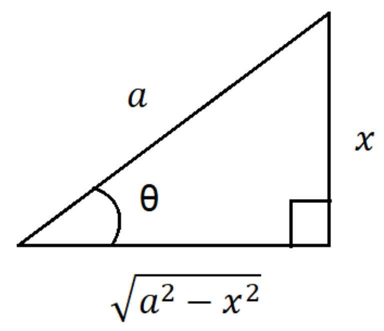

Figura 3

Podemos auxiliarnos con un triángulo rectángulo como vemos en la figura, y recordar un poco de trigonometría básica, recordemos que en un triángulo rectángulo:

$$\sin(0) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{a} \Rightarrow a \cdot sin0 = x$$

Podemos hacer la sustitución

$$x = a \cdot sin\,(0) \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$\cos(0) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos\,(0) \qquad (2)$$

Estas son las sustituciones que debemos de hacer para integrales del tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, en este punto talvez pueda ser un poco confuso de utilizarlas, así que veamos el ejemplo siguiente.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$$

Vemos que lo que está adentro de la raíz es similar al del caso (1), por lo que podemos hacer la siguiente figura:

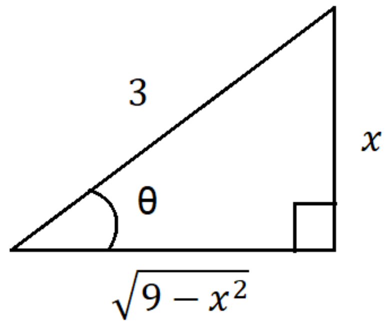

Figura 4

De la figura (2) y de la relación (1), podemos escribir:

$$\frac{x}{3} = \sin(0) \Rightarrow x = 3\sin(0) \Rightarrow dx = 3\cos(0)\, d0$$

Elevamos al cuadrado la variable x como:

$$x^2 = 9sin^2\,(0)$$

Por otro lado, utilizando la relación (2) tenemos que:

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \cos(0) \Rightarrow \sqrt{9-x^2} = 3\cos\,(0)$$

Así sustituimos estas variables en la integral obteniendo lo siguiente:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos(0)\,d0}{9sin^2(0)3\cos\,(0)} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{sin^2(0)}d0 = \frac{1}{9}\int csc^2(0)d0$$

La resolución de esta integral se utiliza los métodos de integrales trigonométricas vistos en esta entrada, por lo que:

$$\frac{1}{9}\int csc^2(0)d0 = \frac{1}{9}(-\cot(0)) + C$$

Volvemos a la variable original x, reescribimos a la función cotangente como:

$$\cot(0) = \frac{\cos(0)}{\sin(0)}$$

Con los cambios de variable que hicimos, tenemos que:

$$\cot(0) = \frac{\cos(0)}{\sin(0)} = \frac{\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Así la resolución de la integral es:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

Caso 2: Integrales de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$

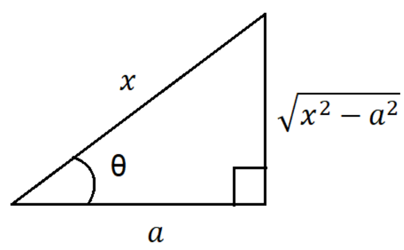

Figura 5

Análogamente, nos auxiliamos de un triángulo rectángulo como vemos en la figura 5, recordamos que:

$$\sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{x}{a}$$

Podemos hacer la sustitución:

$$x = a \cdot sec\,(0) \qquad (3)$$

Por otro lado:

$$\mathbf{tan}(\mathbf{0}) = \frac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \mathbf{tan}\,(\mathbf{0}) \qquad (4)$$

Por lo que estas son las sustituciones que debemos hacer en este caso, veamos un ejemplo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}$$

Nos fijamos en el radicando y notamos que es similar al caso (2), pero vemos que tenemos un problema con el número que va multiplicando x^2, ya que se quiere que sea de la forma: $\sqrt{x^2 - a^2}$, por lo que podemos rescribir el radical como sigue:

$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25(x^2 - \frac{4}{24})} = \sqrt[5]{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} \quad (5)$$

Así podemos hacer la siguiente figura:

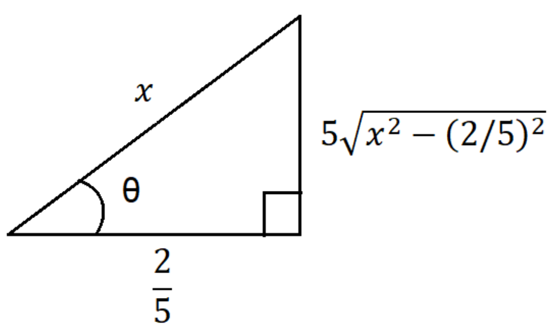

Figura 6

De la figura (6) y de la relación (3), hacemos la sustitución:

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{5}sec(0) \Rightarrow dx = \frac{2}{5}sec(0)tan(0)d0}$$

Por otro lado, utilizando la relación (4), tenemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2}}}{\frac{2}{5}} = \tan(0) \Rightarrow \sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2}} = \frac{2}{5}\tan(0)$$

Sustituyendo en la integral tenemos que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{\frac{2}{5}\sec(0)\tan(0)}{5\left(\frac{2}{5}tan(0)\right)}d0 = \frac{1}{5}\int \sec(0)\, d0$$

Recordemos que el 5 que está multiplicando en el divisor viene de la relación (5).

Sabemos que la solución de esta integral está dada como:

$$\int sec(0)\, d0 = ln\ |sec\ (0) + tan(0) + C$$

Por lo que:

$$\frac{1}{5}\int sec(0)\, d0 = \frac{1}{5}ln\ |\, sec(0) + tan(0) + C$$

Volviendo a la variable original x, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \frac{1}{5}ln\left| \frac{5x}{2}\ \frac{\sqrt[5]{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2}}}{2}\right| + C$$

Caso 3: Integrales de la forma $\sqrt{x^2 + a^2}$

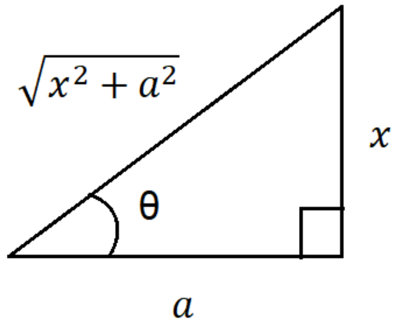

Figura 7

Análogamente, nos auxiliamos de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura (7), sabemos que:

$$\tan(\theta) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{x}{a}$$

Podemos hacer la sustitución:

$$x = a \cdot \tan(\theta) \qquad (6)$$

Por otro lado:

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \sec(\theta) \quad (7)$$

Veamos el siguiente ejemplo para ejemplar este caso.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Podemos expresar el integrando de la siguiente forma:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)} = \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + 1})^3}$$

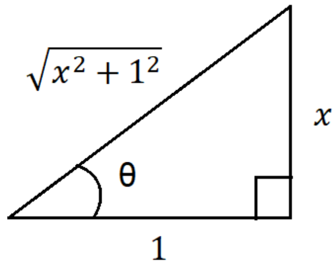

Figura 8

Vemos que es igual al caso (3), por lo que nos ayudamos de la figura (8) y utilizando la relación (6), tenemos que:

$$\boldsymbol{\frac{x}{1} = \tan(0) \Rightarrow dx = sec^2(0)d0}$$

Por otro lado, utilizando la relación (7), se tiene que:

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \sec(0) \Rightarrow (\sqrt{x^2+1})^{\,3} = \sqrt[3]{x^2+1} = sec^3(0)}$$

Sustituyendo en la integral tenemos que:

$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{sec^2(0)d0}{sec^3(0)} = \int \frac{1}{\sec(0)} d0 = \int \cos(0)\, d0 = sin0 + C}$$

Para regresar a la variable $\boldsymbol{x}$ volvemos a auxiliarnos de la figura (8), recordemos que:

$$\boldsymbol{\sin(0) \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Así:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

2.3.6 MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES.

¿Qué es el método de fracciones parciales?

Es una técnica para integrar funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Dónde $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ son polinomios, y el grado de $\boldsymbol{P(x)}$ es menor que el de $\boldsymbol{Q(x)}$. Si no es así, primero hay que hacer una división polinómica.

La idea es descomponer la función racional en sumas de fracciones más simples (fracciones parciales) que sean fáciles de integrar.

¿Qué tipo de integrales se pueden resolver?

Este método se usa para integrar funciones racionales donde el denominador $\boldsymbol{Q(x)}$ se puede factorizar en factores lineales o cuadráticos reales. No funciona directamente si hay raíces irreducibles de grado mayor. Por ejemplo:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}\, dx$$

Tipos de descomposición

1. Factores lineales diferentes

Si $\boldsymbol{Q(x)}$ = ($\boldsymbol{x}$ - $\boldsymbol{a}$)($\boldsymbol{x}$ - $\boldsymbol{b}$) con raíces distintas $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+2x-3}\,dx$$

Resuelve:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

Factoriza:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

Plantea:

$$\frac{5x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Multiplica por (x + 3)(x - 1):

$$5x + 1 = A(x-1) + B(x+3)$$

Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -A + 3B = 1 \end{cases}$$

De la primera: B = 5 - A

Sustituye:

$$
\begin{aligned}
&-A + 3(5 - A) = 1 \\
&-A + 15 - 3A = 1 \\
&-4A + 15 = 1 \\
&-4A = -14 \\
&A = 3.5,\ B = 1.5
\end{aligned}
$$

Integra:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+2x-3}\,dx = 3.5\int \frac{dx}{x+3} + 1.5\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3.5\ln|x+3| + 1.5\ln|x-1| + C$$

2. Factores lineales y repetidos

Si $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) = (\ \boldsymbol{x} + a\ )^n$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Ejemplo:

Resuelve:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}\,dx$$

Plantea:

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Multiplica por (x - 1)^2:

$$2x + 3 = A(x - 1) + B$$

Sustituye x = 1:

$$2(1) + 3 = A(0) + B \implies 5 = B$$

hora despeja A sustituyendo B = 5:

$$2x + 3 = A(x - 1) + 5$$

$$2x + 3 - 5 = A(x - 1)$$

$$2x - 2 = A(x - 1)$$

$$A = 2$$

Integra:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{5}{(x-1)^2} dx$$

$$= 2 \ln |x - 1| - \frac{5}{x-1} + C$$

3. Factor cuadrático irreducible

Si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático sin raíces reales (x^2 + bx + c):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Ejemplo:

Resuelve:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}\, dx$$

Plantea:

Ya está en la forma $\frac{Ax+B}{x^2+4}$:

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx$$

Integra:

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4. Factor cuadrático repetido

Si $Q(x)$ = (x^2 + bx + c)^n

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots$$

Ejemplo:

Resuelve

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Plantea:

$$\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2}$$

Multiplica por ($x^2 + 1)^2$:

$$x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + C$$

Expande:

$$x^2 + 1 = (Ax^3 + Ax) + (Bx^2 + B) + C$$

Agrupa términos:

$$x^2 + 1 = Ax^3 + Bx^2 + Ax + (B + C)$$

Igualamos coeficientes:

- Coef. x^3: $A = 0$
- Coef. x^2: $B = 1$
- Coef. x: $A = 0$

Constante:

$$B + C = 1 \implies 1 + C = 1 \implies C = 0$$

$$\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Integra:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \arctan x + C$$

CONCLUSIÓN

Posteriormente de revisar los métodos de integración por partes, integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica y fracciones parciales, podemos darnos cuenta de que cada uno de ellos es clave para resolver diferentes tipos de integrales que, a simple vista, pueden parecer muy complicadas. Aunque al principio estos métodos pueden parecer difíciles de aplicar, con una buena explicación y práctica constante se vuelven mucho más comprensibles y manejables para todos nosotros.

A lo largo del desarrollo de nuestra investigación se explicó en qué consiste cada técnica, cuándo es más conveniente utilizarla y cómo aplicarla paso a paso. Los ejemplos prácticos que se incluyeron ayudan a demostrar que, aunque estos temas requieren atención, no son imposibles de entender. Más bien, todo es cuestión de familiarizarse con los procesos, reconocer los distintos tipos de funciones y aplicar la estrategia adecuada en cada caso.

Además, comprender a fondo estos métodos de integración resulta especialmente valioso para quienes cursamos la carrera de Ingeniería en Informática, ya que las matemáticas forman parte fundamental de nuestra formación. La capacidad de resolver integrales utilizando distintas estrategias no solo fortalece nuestras habilidades analíticas, sino que también nos prepara para abordar problemas más complejos en áreas como el procesamiento de señales, algoritmos numéricos, inteligencia artificial o gráficos computacionales.

En conclusión, el dominio de estas técnicas de integración representa una base sólida para continuar con el estudio del cálculo y su aplicación en el ámbito profesional. No se trata únicamente de memorizar procedimientos, sino de desarrollar una comprensión profunda del porqué de cada método y saber elegir la estrategia adecuada en cada situación.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Boelkins, D. Austin y S. Schlicker, *Cálculo Activo*, LibreTexts (español), 2025, Sección 5.4 "Integración por partes". [En línea]. Disponible: https://espanol.libretexts.org/.../Integraci%C3%B3n_por_Partes [Accedido: 03-05-2025].

[2] Matesfacil.com, "Integración por partes", [En línea]. Disponible: https://www.matesfacil.com/resueltos-integracion-por-partes.htm [Accedido: 03-05-2025].

[3] OpenStax, *Cálculo, Volumen 2* (versión en español), Houston, TX, 2022, Cap. 3.1 "Integración por partes". [En línea]. Disponible: https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/3-1-integracion-por-partes [Accedido: 03-05-2025].

[4] julioprofe. Integrales trigonométricas | Ej. 1 #julioprofe. (13 de abril de 2011). [Video en línea]. Disponible: https://www.youtube.com/watch?v=FUZzUalCxlo. [Accedido: 03-05-2025].

[5] EasyMaths Colombia. Integrales trigonométricas | potencias de seno y coseno | easymaths. (8 de junio de 2020). [Video en línea]. Disponible: https://www.youtube.com/watch?v=RXdGhzPCL3I. [Accedido: 03-05-2025].

[6] Miguel Ángel Rodríguez García. "Cálculo Diferencial e Integral II: Integrales trigonométricas-Producto de potencias de senos y cosenos - El blog de Leo". El blog de Leo. [En línea]. Disponible: https://blog.nekomath.com/calculo-diferencial-e-integral-ii-integrales-trigonometricas-producto-de-potencias-de-senos-y-cosenos/. [Accedido: 03-05-2025].

[4] Miguel Ángel Rodríguez García. “integrales de potencias de tangente y secante archivos - El blog de Leo”. El blog de Leo. [En línea]. Disponible: https://blog.nekomath.com/tag/integrales-de-potencias-de-tangente-y-secante/. [Accedido: 03-05-2025].

[5] Matemáticas Piña Profe Piña. Integración de potencias trigonométricas (ejemplo 1). (5 de diciembre de 2020). [Video en línea]. Disponible: https://www.youtube.com/watch?v=YnNqR370myg. [Accedido: 03-05-2025].

[6] MateFacil. 155. integrales trigonométricas con secante y tangente explicadas por CASOS. (15 de diciembre de 2016). [Video en línea]. Disponible: https://www.youtube.com/watch?v=Z1EELvQER3o. [Accedido: 03-05-2025].

[7] G. Strang and E. “jed” Herman, “3.3 Sustitución trigonométrica,” Cálculo volumen 2, 24-Mar-2022. [En línea]. Disponible: https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/3-3-sustitucion-trigonometrica. [Accedido: 03-05-2025].

[8] M. Á. R. García, “Cálculo Diferencial e Integral II: Sustitución Trigonométrica,” El blog de Leo, 24-Jan-2022. [En línea]. Disponible: https://blog.nekomath.com/calculo-diferencial-e-integral-ii-sustitucion-trigonometrica/. [Accedido: 03-05-2025].

[9] R. Jara, “Integrales ¿Qué Método Utilizar?”, 24-nov-2019. [En línea]. Disponible en: https://youtu.be/-kFDhpt7dCI?si=KKoHpbHdV-ru-cAe. [Accedido: 03-05-2025].

[10] A. Gómez, “Integración por Fracciones Parciales”, *YouTube*, 27-oct-2019. [En línea]. Disponible en: https://youtu.be/6pFmUh41jsQ?si=2UvhiHESqyGeITvt. [Accedido: 03-05-2025].

[11] DataCodex, “Fracciones Parciales, Los cuatro casos de APLICACION”, YouTube, 22-oct-2020. [En línea]. Disponible en: https://youtu.be/bAp7sh1pCZQ?si=SwPqWSA_58IzbH-K [Accedido: 03-05-2025].

[12] A. Gómez, “Integración por fracciones parciales | Los cuatro casos Introducción”, YouTube, 31-oct-2019. [En línea]. Disponible en: https://youtu.be/uwDKdolLkns?si=YLx0GFSoPTBkPiU9. [Accedido: 03-05-2025].

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR

DE SAN ANDRÉS TUXTLA

PROBLEMARIO UNIDAD 2

INTEGRANTES:

Irving Zuriel Fiscal Cobix.

Evelyn de los Ángeles López Ávila.

Irma Joselin Pérez García.

Brian Reyes Carvajal.

Isis del Carmen Toto Pucheta.

CARRERA: Ingeniería informática.

DOCENTE: Pablo Promotor Campechano.

MATERIA: Cálculo integral.

GRUPO: 210 A

FECHA DE ENTREGA: 06/05/2025

Fórmula 8

Fórmula: $\int \boldsymbol{U^n dU} = \frac{\boldsymbol{U^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$

Ejercicios 1: Calcular la integral: ∫(3x-2)^{4}dx

Solución:

Identificar *u* y *du*:

u= 3x-2 *du*=3dx → dx= $\frac{du}{3}$

Reescribir la integral en términos de *u*:

$$\int (3x-2)^4 dx = \int u^4 \bullet \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^4 du$$

Aplicar la fórmula de integración para potencias:

$$\int u^n du = \frac{u^{n^{+1}}}{n+1} + C$$

Aquí, *n*=4, entonces:

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C$$

Sustituimos y simplificamos:

$$\frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{15} + C$$

Finalmente, sustituimos u= 3x−2:

$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{(3x-2)^5}{15} + C$$

Ejercicio 2: Calcular la integral: $\int (5x+4)^3dx$

Solución:

Identificar *u* y *du*:

u= 5x+4 *du*=5dx → dx= $\frac{du}{5}$

Reescribir la integral en términos de *u*:

$$\int (5x + 4)^3 dx = \int u^3 \bullet \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int u^3 du$$

Aplicar la fórmula de integración para potencias:

$$\int u^n du = \frac{u^{n^{+1}}}{n + 1} + C$$

Aquí, *n*=3, entonces:

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

Sustituimos y simplificamos:

$$\frac{1}{5}\int u^3 du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{u^4}{20} + C$$

Finalmente, sustituimos u= 5x+4:

$$\int (5x - 4)^3 dx = \frac{(5x - 4)^4}{20} + C$$

Ejercicios 3: Calcular la integral: $\int x(2x+1)^4dx$

Solución:

Identificar *u* y *du*:

u= 2x+1 *du*=2dx → dx= $\frac{du}{2}$

Despejamos *x* en función de *u*:

$$u = 2x + 1 \rightarrow x = \frac{u-1}{2}$$

Reescribir la integral en términos de *u*:

$$\int x(2x+1)^4dx = \int \left(\frac{u-1}{2}\right)u^4 \cdot \frac{du}{2} = \int \frac{u-1}{2} \cdot u^4 \cdot \frac{du}{2} = \int \frac{(u-1)u^4}{4}du$$

Simplificamos:

$$= \frac{1}{4}\int (u^5 - u^4)du = \frac{1}{4}(\int u^5du - \int u^4du)$$

Aplicar la fórmula de integración para potencias:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Calculamos cada integral:

- $\int u^5du = \frac{u^6}{6} + C$
- $\int u^4du = \frac{u^5}{5} + C$

Sustituimos y simplificamos:

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}\right)+C=\frac{u^6}{24}-\frac{u^5}{20}+C$$

Volver a la variable original: *u= 2x+1*

Finalmente, obtenemos:

$$\int x(2x+1)^4dx=\left(\frac{2x+1}{24}\right)^6-\frac{(2x+1)^5}{20}+C$$

Ejercicios 4: Calcular la integral: $\int(7x-3)^2dx$

Solución:

Identificar *u* y *du*:

u= 7x-3 *du*=7dx → dx= $\frac{du}{7}$

Reescribir la integral en términos de *u*:

$$\int(7x-3)^2dx=\int u^2\bullet\frac{du}{7}=\frac{1}{7}\int u^2du$$

Aplicar la fórmula de integración para potencias:

$$\int u^n du=\frac{u^{n^{+1}}}{n+1}+C$$

Aquí, *n*=2, entonces:

$$\int u^2du=\frac{3}{3}+C$$

Sustituimos y simplificamos:

$$\frac{1}{7}\int u^2 du = \frac{1}{7}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{3}{21} + C$$

Finalmente, sustituimos u= 3x−2:

$$\int (7x-3)^2 dx = \frac{(7x-3)^3}{21} + C$$

Ejercicio 5

Calcular:

$$\int \quad (2x+3)^4\, dx$$

Solución paso a paso:

1. Definir la sustitución:

Sea

$$u = 2x + 3$$

2. Calcular el diferencial du:

$$du = 2\,dx \implies dx = \frac{du}{2}$$

3. Reescribir la integral en términos de u:

$$\int \quad (2x+3)^4\, dx = \int\ u^4 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\ u^4\, du$$

4. Aplicar la fórmula de la integral de potencia:

$$\int u^4\,du = \frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{u^5}{5} + C$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\int u^4\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} + C = \frac{u^5}{10} + C$$

5. Sustituir $u = 2x + 3$ de nuevo:

$$\int (2x+3)^4\,dx = \frac{(2x+3)^5}{10} + C$$

Fórmula 9

Fórmula: $\int \boldsymbol{e^U du = e^u + c}$

Ejercicio 1

Calcular: $\int \mathbf{e^{2x+1}dx}$

Solución paso a paso:

Identificamos la función dentro del exponente: u=3x

Calculamos du:

$$\mathrm{du} = 3\mathrm{dx} \rightarrow \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{du}}{3}$$

Reescribimos la integral en términos de u

$$\int \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \int \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\cdot\frac{\mathrm{du}}{3} = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

Aplicamos la fórmula básica:

$$\frac{1}{3}\int e^{u}du = \frac{1}{3}e^{u} + C$$

Sustituimos u=3xu=3x:

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Ejercicio 2

Calcular: $\int \mathbf{e^{-5x}dx}$

Solución paso a paso:

Definimos $u=-5x$

Calculamos du:

$$du = -5dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{-5}$$

Reescribimos la integral:

$$\int e^{-5x}dx = \int e^{u} \cdot \frac{du}{-5} = -\frac{1}{5}\int e^{u}du$$

Aplicamos la fórmula:

$$-\frac{1}{5}\int e^{u}\, du = -\frac{1}{5}e^{u} + C$$

Sustituimos u:

$$\int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$$

Ejercicio 3

Calcular: $\int \mathbf{x} \cdot \mathbf{e^{x2}dx}$

Solución paso a paso:

1. Identificar la sustitución:
   - Sea $u=x^2$.
2. Calcular el diferencial:
   - du=2x dx=, entonces $dx=\frac{du}{2x}$

Reescribir la integral en términos de u:

$$\int x \bullet e^{x^2}\,dx = \int x \bullet e^{u} \bullet \frac{du}{2x}$$

Simplificamos la expresión:

$$\int x \bullet e^{u} \bullet \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^{u}du$$

Aplicar la fórmula básica de integración:

$$\int x \cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Por lo tanto, la solución de la integral es:

$$\int x \cdot e^{x2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejercicio 4

Calcular:

$$\int (2x + 7)e^{x^2+7x}dx$$

Solución paso a paso:

1. Definimos la sustitución

$$u = x^2 + 7x$$

2. Derivamos para obtener du:

$$du = (2x + 7)dx$$

3. Observamos que (2x+7)dx = du, por lo que la integral queda:

$$\int e^u du$$

Aplicamos la fórmula básica:

$$\int e^u du = e^u + C$$

Sustituimos u de nuevo:

$$\int (2x + 7)e^{x^2+7x}dx = e^{x^2+7x} + C$$

Ejercicio 5

Calcular:

$$\int e^{5x+2}\,dx$$

Solución paso a paso:

1. Definir la sustitución:

Sea

$$u = 5x + 2$$

2. Calcular el diferencial du:

$$du = 5\,dx \implies dx = \frac{du}{5}$$

3. Reescribir la integral en términos de u:

$$\int e^{5x+2}\,dx = \int e^{u} \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^{u}\,du$$

4. Aplicar la fórmula de la integral:

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{5}\int e^{u}\,du = \frac{1}{5}e^{u} + C$$

5. Sustituir $u = 5x + 2$ de nuevo:

$$\int e^{5x+2}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x+2} + C$$

Fórmula 10

Fórmula: $\int \frac{du}{u} = \boldsymbol{ln\,u + C}$

Ejercicio 1

Calcular:

$$\int \frac{dx}{x}$$

Solución paso a paso:

1. Identificamos la integral: $\int \frac{1}{x} dx$.
2. Reconocemos que el integrando es $\frac{1}{x}$, por lo que podemos tomar $u = x$.
3. Entonces, $du = dx$.
4. La integral queda:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln\ |u| + C$$

5. Sustituimos $u = x$:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\ |x| + C$$

Ejercicio 2

Calcular:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\ dx$$

Solución paso a paso:

1. Observamos el denominador $x^2 + 1$ y el numerador $2x$, que es la derivada del denominador.

2. Definimos la sustitución:

$$u = x^2 + 1$$

3. Derivamos para encontrar du:

$$du = 2x\ dx$$

4. Despejamos dx:

$$dx = \frac{du}{2x}$$

5. Reescribimos la integral usando la sustitución:

$$\int \frac{2x}{u}\ dx = \int \frac{2x}{u} \cdot dx = \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{u}\ du$$

6. Integramos:

$$\int \frac{1}{u}\ du = \ln\ |u| + C$$

7. Sustituimos $u = x^2 + 1$:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\ dx = \ln\ |x^2 + 1| + C$$

Ejercicio 3

Calcular:

$$\int \frac{5}{5x + 3}\ dx$$

Solución paso a paso:

1. Observamos que el denominador es $5x + 3$.

2. Definimos la sustitución:

$$u = 5x + 3$$

3. Derivamos para encontrar du:

$$du = 5\ dx$$

4. Despejamos dx:

$$dx = \frac{du}{5}$$

5. Reescribimos la integral:

$$\int \frac{5}{u} \cdot dx = \int \frac{5}{u} \cdot \frac{du}{5} = \int \frac{1}{u}\ du$$

6. Integramos:

$$\int \frac{1}{u}\ du = \ln\ |u| + C$$

7. Sustituimos $u = 5x + 3$:

$$\int \frac{5}{5x+3}\ dx = \ln\ |5x + 3| + C$$

Ejercicio 4

Calcular:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4}\ dx$$

Solución paso a paso:

1. Observamos que el denominador es $x^2 - 4$ y el numerador es x, que es parte de la derivada del denominador.

2. Definimos la sustitución:

$$u = x^2 - 4$$

3. Derivamos para encontrar du:

$$du = 2x\ dx$$

4. Despejamos $x\ dx$:

$$x\ dx = \frac{du}{2}$$

5. Reescribimos la integral:

$$\int \frac{x}{u}\ dx = \int \frac{1}{u} \cdot x\ dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\ du$$

6. Integramos:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2} \ln\ |u| + C$$

7. Sustituimos $u = x^2 - 4$:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4}\ dx = \frac{1}{2} \ln\ |x^2 - 4| + C$$

Ejercicio 5

Calcular:

$$\int \frac{\cos\ x}{\sin\ x}\ dx$$

Solución paso a paso:

1. Observamos que el denominador es $\sin\ x$ y el numerador es $\cos\ x$, que es la derivada de $\sin\ x$.

2. Definimos la sustitución:

$$u = \sin\ x$$

3. Derivamos para encontrar du:

$$du = \cos\ x\ dx$$

4. Reescribimos la integral:

$$\int \frac{\cos\ x}{\sin\ x}\ dx = \int \frac{1}{u}\ du$$

5. Integramos:

$$\int \frac{1}{u}\ du = \ln\ |u| + C$$

6. Sustituimos $u = \sin\ x$:

$$\int \frac{\cos\ x}{\sin\ x}\ dx = \ln\ |\sin\ x| + C$$

Fórmula 11

Fórmula: $\int \boldsymbol{senudu} = \boldsymbol{-cosu} + \boldsymbol{C}$

Ejercicio 1

Calcular:

$$\int \sin\ (3x)\ dx$$

Solución paso a paso:

1. Definimos la sustitución:

$$u = 3x$$

2. Derivamos para obtener du:

$$du = 3\ dx\ \Longrightarrow\ dx = \frac{du}{3}$$

3. Reescribimos la integral en términos de u:

$$\int \sin(3x)\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\,du$$

4. Aplicamos la fórmula básica:

$$\frac{1}{3}\int \sin u\,du = \frac{1}{3}(-\cos u) + C = -\frac{1}{3}\cos u + C$$

5. Sustituimos $u = 3x$:

$$\int \sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

Ejercicio 2

Calcular:

$$\int \sin(2x+5)\,dx$$

Solución paso a paso:

1. Definimos:

$$u = 2x + 5$$

2. Calculamos du:

$$du = 2\,dx \implies dx = \frac{du}{2}$$

3. Reescribimos la integral:

$$\int \sin(2x+5)\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sin u\,du$$

4. Aplicamos la fórmula:

$$\frac{1}{2}\int \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

5. Sustituimos u:

$$\int \sin(2x+5)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+5) + C$$

Ejercicio 3

Calcular:

$$\int x\sin(x^2)\,dx$$

Solución paso a paso:

1. Definimos:

$$u = x^2$$

2. Calculamos du:

$$du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{du}{2}$$

3. Reescribimos la integral:

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sin u\,du$$

4. Aplicamos la fórmula:

$$\frac{1}{2}\int \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

5. Sustituimos u:

$$\int x\sin(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

Ejercicio 4:

Calcular:

$$\int \sin(4x)\, dx$$

Solución paso a paso:

1. Definimos la sustitución:

$$u = 4x$$

2. Calculamos el diferencial:

$$du = 4\, dx \implies dx = \frac{du}{4}$$

3. Reescribimos la integral en términos de u:

$$\int \sin(4x)\, dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \sin u\, du$$

4. Aplicamos la fórmula básica:

$$\frac{1}{4}\int \sin u\, du = \frac{1}{4}(-\cos u) + C = -\frac{1}{4}\cos u + C$$

5. Sustituimos $u = 4x$:

$$\int \sin(4x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(4x) + C$$

Ejercicio 5

Calcular la integral:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(2x)\, dx$$

Paso 1: Aplicar fórmula de producto a suma

Recordemos la fórmula:

$$\sin\ A\cos\ B = \frac{1}{2}[\sin\ (A+B) + \sin\ (A-B)]$$

Aplicando con $ A = x $ y $ B = 2x $:

$$\sin\ (x)\cos\ (2x) = \frac{1}{2}[\sin\ (x+2x) + \sin\ (x-2x)] = \frac{1}{2}[\sin\ (3x) + \sin\ (-x)]$$

Pero $\sin\ (-x) = -\sin\ x$, así que:

$$\sin\ (x)\cos\ (2x) = \frac{1}{2}[\sin\ (3x) - \sin\ x]$$

Paso 2: Reescribir la integral

$$\int \sin\ (x)\cos\ (2x)\ dx = \int \frac{1}{2}[\sin\ (3x) - \sin\ x]\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\ (3x)\ dx - \frac{1}{2}\int \sin\ x\ dx$$

Paso 3: Integrar cada término usando $\int \sin\ u\ du = -\cos\ u + C$

- Para $\int \sin\ (3x)\ dx$, hacemos sustitución $u = 3x$, $du = 3dx$, entonces:

$$\int \sin\ (3x)\ dx = -\frac{1}{3}\cos\ (3x) + C$$

- Para $\int \sin\ x\ dx$:

$$\int \sin\ x\ dx = -\cos\ x + C$$

Paso 4: Sustituir resultados

$$\int \sin\ (x)\cos\ (2x)\ dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos\ (3x)\right) - \frac{1}{2}(-\cos\ x) + C$$

$$= -\frac{1}{6}\cos\ (3x) + \frac{1}{2}\cos\ x + C$$

Respuesta final

$$\int \sin(x)\cos(2x)\,dx = -\frac{1}{6}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos\ x + C$$

Fórmula 12

Fórmula: $\int \boldsymbol{cosudu = senu + C}$

Ejercicio 1:

$$\int \cos\frac{5x}{4}\ dx$$

Se tiene $u = \frac{5x}{4}$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{5}{4}$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{4\mathrm{du}}{5} = \mathrm{dx}$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cos\frac{5x}{4}dx = \int cosu\frac{4du}{5} = \frac{4}{5}\int cosudu = \frac{4}{5}senu + C$$

$$\int cos\frac{5x}{4}dx = \frac{4}{5}sen\frac{5x}{4} + C$$

$$y = \frac{4}{5}sen\frac{5x}{4} + C$$

Ejercicio 2:

$$\int \cos\frac{7x}{3}\ dx$$

Se tiene $u = \frac{7x}{3}$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{7}{3}$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{3\mathrm{du}}{7} = \mathrm{dx}$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cos\frac{7x}{3}dx = \int cosu\frac{3du}{7} = \frac{3}{7}\int cosudu = \frac{3}{7}senu + C$$

$$\int cos\frac{7x}{3}dx = \frac{3}{7}sen\frac{7x}{3} + C$$

$$y = \frac{3}{7}sen\frac{7x}{3} + C$$

Ejercicio 3:

$$\int \cos\frac{2x}{5}\ dx$$

Se tiene $u = \frac{2x}{5}$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{5}$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{5\mathrm{du}}{2} = \mathrm{dx}$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cos\frac{2x}{5}dx = \int cosu\frac{5du}{2} = \frac{5}{2}\int cosudu = \frac{5}{2}senu + C$$

$$\int cos\frac{2x}{5}dx = \frac{5}{2}sen\frac{2x}{5} + C$$

$$y = \frac{5}{2}sen\frac{2x}{5} + C$$

Ejercicio 4:

$$\int \cos\frac{4x}{3}\ dx$$

Se tiene $u = \frac{4x}{3}$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{3}$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{3\mathrm{du}}{4} = \mathrm{dx}$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cos\frac{4x}{3}dx = \int cosu\frac{3du}{4} = \frac{3}{4}\int cosudu = \frac{3}{4}senu + C$$

$$\int cos\frac{4x}{3}dx = \frac{3}{4}sen\frac{4x}{3} + C$$

$$y = \frac{3}{4}sen\frac{4x}{3} + C$$

Ejercicio 5:

$$\int \cos\frac{6x}{7}\ dx$$

Se tiene $u = \frac{6x}{7}$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{6}{7}$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{7\mathrm{du}}{6} = \mathrm{dx}$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cos\frac{6x}{7}dx = \int cosu\frac{7du}{6} = \frac{7}{6}\int cosudu = \frac{7}{6}senu + C$$

$$\int cos\frac{6x}{7}dx = \frac{7}{6}sen\frac{6x}{7} + C$$

$$y = \frac{7}{6}sen\frac{6x}{7} + C$$

Fórmula 13

Fórmula: $\boldsymbol{\int tanudu = \ln(secu) + C = -\ln(cosu) + C}$

Ejercicio 1:

$$\boldsymbol{\int \frac{5tan2xdx}{3} = \frac{5}{3}\int tan2xdx}$$

Se tiene $u = 2x$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = 2$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{du}{2} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\frac{5}{3}\int tan2xdx = \frac{5}{3}\int tanu\frac{du}{2} \ \ = \frac{5}{3}(\frac{1}{2})\int tanudu$$

$$\frac{5}{6}\int tanudu = \frac{5}{6}ln(secu) + C$$

$$\int \frac{5tan2xdx}{3} = \frac{5}{6}ln(sec2x) + C$$

$$y = \frac{5}{6}ln(sec2x) + C$$

Ejercicio 2:

$$\int \frac{6tan3xdx}{5} \ = \frac{6}{5}\int tan3xdx$$

Se tiene $u = 3x$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = 3$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{du}{3} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\frac{6}{5}\int tan3xdx = \frac{6}{5}\int tanu\frac{du}{3} \ \ = \frac{6}{5}(\frac{1}{3})\int tanudu$$

$$\frac{6}{15}\int tanudu = \frac{6}{15}ln(secu) + C$$

$$\int \frac{6tan3xdx}{5} = \frac{6}{15}ln(sec3x) + C$$

$$y = \frac{6}{15}ln(sec3x) + C$$

Ejercicio 3:

$$\int \frac{4tan4xdx}{7} = \frac{4}{7}\int tan4xdx$$

Se tiene $u = 4x$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = 4$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{du}{4} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\frac{4}{7}\int tan4xdx = \frac{4}{7}\int tanu\frac{du}{4} = \frac{4}{7}(\frac{1}{4})\int tanudu$$

$$\frac{4}{28}\int tanudu = \frac{4}{28}ln(secu) + C$$

$$\int \frac{4tan4xdx}{7} = \frac{4}{28}ln(sec4x) + C$$

$$y = \frac{4}{28}ln(sec4x) + C$$

Ejercicio 4:

$$\int \frac{9tan5xdx}{2} = \frac{9}{2}\int tan5xdx$$

Se tiene $u = 5x$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = 5$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{du}{5} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\frac{9}{2}\int tan5xdx = \frac{9}{2}\int tanu\frac{du}{5} \quad = \frac{9}{2}(\frac{1}{5})\int tanudu$$

$$\frac{9}{10}\int tanudu = \frac{9}{10}ln(secu) + C$$

$$\int \frac{9tan5xdx}{2} = \frac{9}{10}ln(sec5x) + C$$

$$y = \frac{9}{10}ln(sec5x) + C$$

Ejercicio 5:

$$\int \frac{3tan6xdx}{8} \; = \frac{3}{8}\int tan6xdx$$

Se tiene $u = 6x$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = 6$$

Se despeja el diferencial dx

$$\frac{du}{6} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\frac{3}{8}\int tan6xdx = \frac{3}{8}\int tanu\frac{du}{6} \quad = \frac{3}{8}(\frac{1}{6})\int tanudu$$

$$\frac{3}{48}\int tanudu = \frac{3}{48}ln(secu) + C$$

$$\int \frac{3tan6xdx}{8} = \frac{3}{48}ln(sec6x) + C$$

$$y = \frac{3}{48}ln(sec6x) + C$$

Fórmula 14

Fórmula: $\int \boldsymbol{cotudu} = \boldsymbol{ln}\ (\boldsymbol{senu}) + \boldsymbol{C}$

Ejercicio 1:

$$\int cot\ (\frac{3x}{4} + 2)dx$$

Se tiene $u = \frac{3x}{4} + 2$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4}$$

Se despeja a dx

$$\frac{4du}{3} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cot\left(\frac{3x}{4} + 2\right)dx = \int cot(u)\frac{4du}{3} \quad = \frac{4}{3}\int cotudu = \frac{4}{3}ln\ (senu) + C$$

$$\int cot(\frac{3x}{4} + 2)dx = \frac{4}{3} ln\, [sen(\frac{3x}{4} + 2)] + C$$

$$y = \frac{4}{3} ln\, [sen(\frac{3x}{4} + 2)] + C$$

Ejercicio 2:

$$\int cot\, (\frac{4x}{9} + 6)dx$$

Se tiene $u = \frac{4x}{9} + 6$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{9}$$

Se despeja a dx

$$\frac{9du}{4} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cot\left(\frac{4x}{9} + 6\right)dx = \int cot(u)\frac{9du}{4} = \frac{9}{4}\int cotudu = \frac{9}{4} ln\, (senu) + C$$

$$\int cot(\frac{4x}{9} + 6)dx = \frac{9}{4} ln\, [sen(\frac{4x}{9} + 1)] + C$$

$$y = \frac{9}{4} ln\, [sen(\frac{4x}{9} + 1)] + C$$

Ejercicio 3:

$$\int cot\, (\frac{x}{2} + 1)dx$$

Se tiene $u = \frac{x}{2} + 1$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{2}$$

Se despeja a dx

$$\frac{2du}{x} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cot\left(\frac{x}{2}+1\right)dx = \int cot(u)\frac{2du}{x} \ = \frac{2}{x}\int cotudu = \frac{2}{x}ln\ (senu) + C$$

$$\int cot(\frac{x}{2}+1)dx = \frac{2}{x}ln\ [sen(\frac{x}{2}+1)] + C$$

$$y = \frac{2}{x}ln\ [sen(\frac{x}{2}+1)] + C$$

Ejercicio 4:

$$\int cot\ (\frac{6x}{11}+5)dx$$

Se tiene $u = \frac{6x}{11} + 5$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{6}{11}$$

Se despeja a dx

$$\frac{11du}{5} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cot\left(\frac{6x}{11}+5\right)dx = \int cot(u)\frac{11du}{6} \ = \frac{11}{6}\int cotudu = \frac{11}{6}ln\ (senu) + C$$

$$\int cot(\frac{6x}{11}+5)dx = \frac{11}{6} ln\ [sen(\frac{6x}{11}+5)] + C$$

$$y = \frac{11}{6} ln\ [sen(\frac{6x}{11}+5)] + C$$

Ejercicio 5:

$$\int cot\ (\frac{2x}{3}+4)dx$$

Se tiene $u = \frac{2x}{3} + 4$

Se calcula

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3}$$

Se despeja a dx

$$\frac{3du}{2} = dx$$

Se realiza el cambio de variable

$$\int cot\left(\frac{2x}{3}+4\right)dx = \int cot(u)\frac{3du}{2} = \frac{3}{2}\int cotudu = \frac{3}{2} ln\ (senu) + C$$

$$\int cot(\frac{2x}{3}+4)dx = \frac{3}{2} ln\ [sen(\frac{2x}{3}+4)] + C$$

$$y = \frac{3}{2} ln\ [sen(\frac{2x}{3}+4)] + C$$

Fórmula 15

Fórmula: $\int secudu$ **= ln (**$secu$ **+** $tanu$**) +** C

Ejercicio 1:

Integral:

$\int sec(x)dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int sec(x)dx$

Se calcula directamente usando la fórmula:

$\int sec(u)du = ln \mid sec(u) + tan(u) \mid + C$

Como u=x, se aplica directamente:

$ln \mid sec(x) + tan(x) \mid + C$

Ejercicio 2:

Integral:

$$\int sec(2x) \cdot 2dx$$

Procedimiento:

Se tiene:

$$\int sec(2x) \cdot 2dx$$

Se realiza el cambio de variable:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

Entonces:

$$\int sec(2x) \cdot 2dx = \int sec(u)du$$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid sec(u) + tan(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 2x:

$ln \mid sec(2x) + tan(2x) \mid +C$

Ejercicio 3:

Integral:

$$\int 3sec(3x)dx$$

Procedimiento:

Se tiene:

$$\int 3sec(3x)dx$$

Sacamos la constante:

$= 3\int sec(3x)dx$

Realizamos el cambio de variable:

$$u = 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

Entonces:

$3\int sec(3x)dx = 3 \cdot \frac{1}{3}\int sec(u)du = \int sec(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid sec(u) + tan(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 3x:

$ln \mid sec(3x) + tan(3x) \mid +C$

Ejercicio 4:

Integral:

$$\int sec(5x+1) \cdot 5dx$$

Procedimiento:

Se tiene:

$$\int sec(5x+1) \cdot 5dx$$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 5x + 1 \Rightarrow du = 5dx$

Entonces:

$$\int sec(5x+1) \cdot 5dx = \int sec(u)du$$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid sec(u) + tan(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 5x + 1:

$ln \mid sec(5x+1) + tan(5x+1) \mid +C$

Ejercicio 5:

Integral:

$\int sec(4x-2) \cdot 4dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int sec(4x-2) \cdot 4dx$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 4x - 2 \Rightarrow du = 4dx$

Entonces:

$\int sec(4x-2) \cdot 4dx = \int sec(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid sec(u) + tan(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 4x−2:

$ln \mid \sec(4x - 2) + \tan(4x - 2) \mid +C$

Fórmula 16

Fórmula: $\int cscudu = \ln(cscu - cotu) + C$

Ejercicio 1:

Integral:

$\int csc(x)dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int csc(x)dx$

Se calcula directamente usando la fórmula:

$\int csc(u)du = ln \mid csc(u) - cot(u) \mid +C$

Como u=x, se aplica directamente:

$ln \mid \csc(x) - \cot(x) \mid +C$

Ejercicio 2:

Integral:

$\int csc(2x) \cdot 2dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int csc(2x) \cdot 2dx$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

Entonces:

$\int csc(2x) \cdot 2dx = \int csc(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid csc(u) - cot(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 2x:

$ln \mid csc(2x) - cot(2x) \mid +C$

Ejercicio 3:

Integral:

$\int 3csc(3x)dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int 3csc(3x)dx$

Sacamos la constante:

$= 3\int csc(3x)dx$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

Entonces:

$3\int csc(3x)dx = 3 \cdot \frac{1}{3}\int csc(u)du = \int csc(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid \csc(u) - \cot(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 3x:

$ln \mid csc(3x) - cot(3x) \mid +C$

Ejercicio 4:

Integral:

$\int csc(5x + 1) \cdot 5dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int csc(5x + 1) \cdot 5dx$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 5x + 1 \Rightarrow du = 5dx$

Entonces:

$\int csc(5x + 1) \cdot 5dx = \int csc(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid csc(u) - cot(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 5x+1:

$ln \mid csc(5x + 1) - cot(5x + 1) \mid +C$

Ejercicio 5:

Integral:

$\int csc(6x - 2) \cdot 6dx$

Procedimiento:

Se tiene:

$\int csc(6x - 2) \cdot 6dx$

Realizamos el cambio de variable:

$u = 6x - 2 \Rightarrow du = 6dx$

Entonces:

$\int csc(6x - 2) \cdot 6dx = \int csc(u)du$

Aplicamos la fórmula:

$ln \mid csc(u) - cot(u) \mid +C$

Reemplazamos u por 6x−2:

$ln \mid csc(6x-2) - cot(6x-2) \mid +C$

Fórmula 17

Fórmula: $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

Ejercicio 1:

$$\int \sec^2(3x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 3x \Rightarrow du = 3\, dx \Rightarrow dx = du/3$

$\int \sec^2(u) * (1/3)\, du = (1/3) \int \sec^2(u)\, du = (1/3) \tan(u) + C$

Resultado: $(1/3) \tan(3x) + C$

Ejercicio 2:

$$\int 2 \sec^2(2x + 1)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int 2 \sec^2(u) * (1/2)\, du = \int \sec^2(u)\, du = \tan(u) + C$

Resultado: $\tan(2x + 1) + C$

Ejercicio 3:

$$\int \sec^2(5x - 4)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 5x - 4 \Rightarrow du = 5\, dx \Rightarrow dx = du/5$

$\int \sec^2(u) * (1/5)\, du = (1/5) \tan(u) + C$

Resultado: $(1/5) \tan(5x - 4) + C$

Ejercicio 4:

$$\int 4 \sec^2(4x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 4x \Rightarrow du = 4\, dx \Rightarrow dx = du/4$

$\int 4 \sec^2(u) * (1/4)\, du = \int \sec^2(u)\, du = \tan(u) + C$

Resultado: $\tan(4x) + C$

Ejercicio 5:

$$\int \sec^2(6x + 2)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 6x + 2 \Rightarrow du = 6\, dx \Rightarrow dx = du/6$

$\int \sec^2(u) * (1/6)\, du = (1/6) \tan(u) + C$

Resultado: $(1/6) \tan(6x + 2) + C$

Fórmula 18

Fórmula: $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

Ejercicio 1:

$$\int \csc^2(2x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int \csc^2(u) * (1/2)\, du = (1/2) \int \csc^2(u)\, du = -(1/2) \cot(u) + C$

Resultado: $-(1/2) \cot(2x) + C$

Ejercicio 2:

$$\int 3 \csc^2(3x + 1)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 3x + 1 \Rightarrow du = 3\, dx \Rightarrow dx = du/3$

$\int 3 \csc^2(u) * (1/3)\, du = \int \csc^2(u)\, du = -\cot(u) + C$

Resultado: $-\cot(3x + 1) + C$

Ejercicio 3:

$$\int (1/4) \csc^2(4x - 5)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 4x - 5 \Rightarrow du = 4\, dx \Rightarrow dx = du/4$

$\int (1/4) \csc^2(u) * (1/4)\, du = (1/16) \int \csc^2(u)\, du = -(1/16) \cot(u) + C$

Resultado: $-(1/16) \cot(4x - 5) + C$

Ejercicio 4:

$$\int \csc^2(6x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 6x \Rightarrow du = 6\, dx \Rightarrow dx = du/6$

$\int \csc^2(u) * (1/6)\, du = -(1/6) \cot(u) + C$

Resultado: $-(1/6) \cot(6x) + C$

Ejercicio 5:

$$\int 2 \csc^2(2x - 3)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int 2 \csc^2(u) * (1/2)\, du = \int \csc^2(u)\, du = -\cot(u) + C$

Resultado: $-\cot(2x - 3) + C$

Fórmula 19

Fórmula: $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

Ejercicio 1:

$$\int \sec(3x) \tan(3x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 3x \Rightarrow du = 3\,dx \Rightarrow dx = du/3$

$\int \sec(u) \tan(u) * (1/3)\, du = (1/3) \int \sec(u) \tan(u)\, du = (1/3) \sec(u) + C$

Resultado: $(1/3) \sec(3x) + C$

Ejercicio 2:

$$\int 2 \sec(2x+1) \tan(2x+1)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int 2 \sec(u) \tan(u) * (1/2)\, du = \int \sec(u) \tan(u)\, du = \sec(u) + C$

Resultado: $\sec(2x + 1) + C$

Ejercicio 3:

$$\int 5 \sec(5x - 2) \tan(5x - 2)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 5x - 2 \Rightarrow du = 5\,dx \Rightarrow dx = du/5$

$\int 5 \sec(u) \tan(u) * (1/5)\, du = \int \sec(u) \tan(u)\, du = \sec(u) + C$

Resultado: $\sec(5x - 2) + C$

Ejercicio 4:

$$\int (1/2) \sec(4x) \tan(4x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 4x \Rightarrow du = 4\, dx \Rightarrow dx = du/4$

$\int (1/2) \sec(u) \tan(u) * (1/4)\, du = (1/8) \int \sec(u) \tan(u)\, du = (1/8) \sec(u) + C$

Resultado: $(1/8) \sec(4x) + C$

Ejercicio 5:

$$\int \sec(6x + 5) \tan(6x + 5)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 6x + 5 \Rightarrow du = 6\, dx \Rightarrow dx = du/6$

$\int \sec(u) \tan(u) * (1/6)\, du = (1/6) \sec(u) + C$

Resultado: $(1/6) \sec(6x + 5) + C$

Fórmula 20

Fórmula: $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

Ejercicio 1:

$$\int \csc(2x) \cot(2x)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int \csc(u) \cot(u) * (1/2)\, du = (1/2) \int \csc(u) \cot(u)\, du = -(1/2) \csc(u) + C$

Resultado: $-(1/2) \csc(2x) + C$

Ejercicio 2:

$$\int 3 \csc(3x + 1) \cot(3x + 1)\, dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 3x + 1 \Rightarrow du = 3\,dx \Rightarrow dx = du/3$

$\int 3 \csc(u) \cot(u) * (1/3)\,du = \int \csc(u) \cot(u)\,du = -\csc(u) + C$

Resultado: $-\csc(3x + 1) + C$

Ejercicio 3:

$$\int (1/4) \csc(4x - 5) \cot(4x - 5)\,dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 4x - 5 \Rightarrow du = 4\,dx \Rightarrow dx = du/4$

$\int (1/4) \csc(u) \cot(u) * (1/4)\,du = (1/16) \int \csc(u) \cot(u)\,du = -(1/16) \csc(u) + C$

Resultado: $-(1/16) \csc(4x - 5) + C$

Ejercicio 4:

$$\int \csc(6x) \cot(6x)\,dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 6x \Rightarrow du = 6\,dx \Rightarrow dx = du/6$

$\int \csc(u) \cot(u) * (1/6)\,du = -(1/6) \csc(u) + C$

Resultado: $-(1/6) \csc(6x) + C$

Ejercicio 5:

$$\int 2 \csc(2x - 3) \cot(2x - 3)\,dx$$

Solución paso a paso:

Sea $u = 2x - 3 \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow dx = du/2$

$\int 2 \csc(u) \cot(u) * (1/2)\,du = \int \csc(u) \cot(u)\,du = -\csc(u) + C$

Resultado: $-\csc(2x - 3) + C$