

Instituto Tecnológico Superior de San Andrés
Tuxtla Veracruz

Ing. Mecatrónica

Grupo: 211-A

José Daniel Domínguez Obil

Cálculo Integral

Docente: Erick de Jesús Téllez Vera.

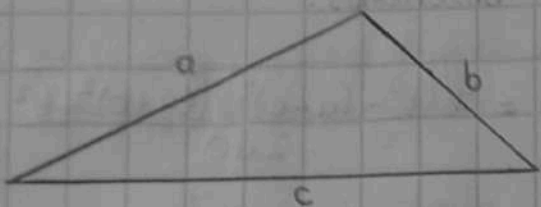
Trabajo: Investigación, Teorema de Heron
Teorema de Eudoxo

Fecha: 27/02/2025.

Formula de Heron.

Herón de Alejandria vivió hacia el siglo III a. de C. son conocidas varias obras suyas, pero se le recuerda sobre todo por la llamada fórmula de Herón, que nos permite calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos s al semiperímetro y a, b, c , a los tres lados:

Llamando al semiperímetro

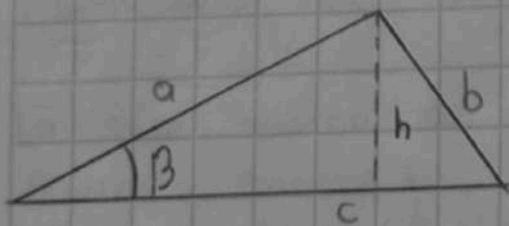


$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Entonces el área puede expresarse como

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

La demonstración de Herón es realmente sorprendente. Combinando elementos geométricos sencillos llega a construir una de las demostraciones más ricas y elegantes de toda la matemática. Presentamos aquí otra más moderna basada en el teorema del coseno.



Fórmula clásica para el área del triángulo nos dice que $A = \frac{c \cdot h}{2}$, o lo que es lo mismo,

$$A = \frac{c \cdot a \cdot \sin B}{2}$$

Por otro lado, el teorema del coseno nos asegura que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. El camino a seguir será despejar $\cos(B)$ de la última ecuación y sustituir $\sin B$ en la anterior.

Tenemos pues que $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ y como $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \text{ entonces } \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2} \text{ o lo que es}$$

$$\text{lo mismo } \sin \beta = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador es una diferencia de Cuadrados y el denominador un cuadrado obtenemos:

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{[2ac - (a^2 + c^2 - b^2)][2ac + (a^2 + c^2 - b^2)]}}{2ac} = \frac{\sqrt{(b^2 - (a-c)^2)[(a+c)^2 - b^2]}}{2ac}$$

Sustituyendo ahora en la fórmula del área, tenemos que.

$$A = \frac{\sqrt{[b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2]}}{4}$$

Y utilizando de nuevo la descomposición de la diferencia de Cuadrados como suma por diferencia nos queda

$$A = \frac{\sqrt{(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)}}{4}$$

Finalmente, introducimos el 4 dentro de la raíz quedando 16, y si observamos que $\frac{b+a-c}{2} = \frac{s-c}{2}$ y que $\frac{b-a+c}{2} = \frac{s-a}{2}$ y así

sucesivamente, llegamos a la fórmula final:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ q.c.d.}$$

Teorema de agotamiento de Eudoxo

El Teorema de Agotamiento, desarrollado por Eudoxo de Cnido en el siglo IV a.C. , es un método matemático utilizado para determinar áreas y volúmenes de figuras geométricas mediante aproximaciones sucesivas. Este teorema fue posteriormente perfeccionado por Arquímedes, quien lo utilizó para calcular con gran precisión áreas y volúmenes de diversas figuras geométricas.

El principio del agotamiento es un precursor del concepto moderno de límite, fundamental en el cálculo integral.

Principio del Agotamiento:

El principio del agotamiento establece que si una cantidad se puede reducir a un valor arbitrariamente pequeño mediante aproximaciones sucesivas, entonces el límite de esas aproximaciones es igual a la cantidad buscada. En términos modernos, es una forma primitiva del concepto de límite inferior e superior.

Formulación del Teorema

La idea básica del teorema se puede expresar de la siguiente manera:

Si tenemos una cantidad A y una sucesión de aproximaciones A_1, A_2, A_3, \dots tales que

$A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ (las aproximaciones se van acercando a A).