

INSTITUTO  
TECNOLOGICO SUPERIOR  
DE SAN ANDRES TUXTLA  
ING. MECATRONICA

JOSE DARIEL DOMINGUEZ OBIL  
GRUPO: 211-A

CALCULO INTEGRAL  
DOCENTE: ERICK DE JESUS TELLEZ VERA  
EXAMEN UNIDAD I  
03 MARZO 2025

1- Explique dos metodos de medir figuras amorfas:

Teorema de Heron

Se divide la figura en varios triangulos, se calcula el area de cada uno de ellos usando el teorema de Heron y al final se suman todas las areas

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Metodo del rectangulo

Se dibujan rectangulos que cubran toda la figura y se calcula el area de cada uno de ellos y a final se suman todas las areas

$$A = b \times h \quad A_T = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

2- Defina que es una figura amorfa. y ejemplifique

3.

Es aquella que no tiene una forma definida como tal y no se puede describir con facilidad

1- Una mancha de tinta en un papel

2- El contorno de una isla en un mapa

3- Una nube

3: ¿Que son las Sumas Riemann?

Las Sumas Riemann son un metodo para aproximar el area bajo una curva en un intervalo  $[a, b]$  dividiendolo en pequeños rectangulos y sumando sus areas

4: Proporcione las propiedades de sumatoria

$$\bullet \sum_{k=1}^n c = cn$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^2+9n+1)}{30}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

S: Ejemplifica las propiedades una por una usando sumas sucesivas y con la correspondiente propiedad como una forma de resolver de manera "mas directa".

$$\sum_{k=1}^n c = cn \rightarrow \text{Ejemplo 1: } S = \sum_{k=1}^{10} 5 = S(10) = \textcircled{50}$$

Usando sumas:  $5+5+5+5+5+5+5+5+5+5 = \textcircled{50}$

$$\sum_{k=1}^n (ak + bk) = \sum_{k=1}^n ak + \sum_{k=1}^n bk \rightarrow \text{Ejemplo 1: } S = \sum_{k=1}^4 (4k + 5k) = \sum_{k=1}^4 4k + \sum_{k=1}^4 5k =$$

$$4 \sum_{k=1}^4 k + 5 \sum_{k=1}^4 k = 4 \frac{4(4+1)}{2} + 5 \frac{4(4+1)}{2} = 4 \frac{4(5)}{2} + 5 \frac{4(5)}{2} = 4 \frac{(20)}{2} + 5 \frac{(20)}{2} =$$

$$(4)(10) + (5)(10) = 40 + 50 = \textcircled{90}$$

Usando Sumas:  $1(4+5) + 2(4+5) + 3(4+5) + 4(4+5) =$

$$= 1(9) + 2(9) + 3(9) + 4(9) = 9 + 18 + 27 + 36 = \textcircled{90}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^5 k = \frac{5(5+1)}{2} = \frac{5(6)}{2} = \frac{30}{2} = \textcircled{15}$$

Usando Sumas:  $1(1) + 1(2) + 1(3) + 1(4) + 1(5) = 1+2+3+4+5 = \textcircled{15}$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{7(7+1)(2(7)+1)}{6} = \frac{7(8)(14+1)}{6} = \frac{(56)(15)}{6} = \frac{840}{6} = 140$$

Usando Sumas:  $1(1)^2 + 1(2)^2 + 1(3)^2 + 1(4)^2 + 1(5)^2 + 1(6)^2 + 1(7)^2 =$   
 $= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^5 k^3 = \frac{(5)^2(5+1)^2}{4} = \frac{(25)(36)}{4} = \frac{900}{4} = 225$$

Usando Sumas:  $1(1)^3 + 1(2)^3 + 1(3)^3 + 1(4)^3 + 1(5)^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^3 k^4 = \frac{3(3+1)(6(3)^3+9(3)^2+3-1)}{30} = \frac{3(4)(162+81+2)}{30} = \frac{12(245)}{30} = \frac{2940}{30} = 98$$

Usando Sumas:  $1(1)^4 + 1(2)^4 + 1(3)^4 = 1 + 16 + 81 = 98$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^4 (2k-1) = 4^2$$

Usando Sumas:  $1(2(1)-1) + 1(2(2)-1) + 1(2(3)-1) + 1(2(4)-1) =$

$$= 1(2-1) + 1(4-1) + 1(6-1) + 1(8-1) = 1(1) + 1(3) + 1(5) + 1(7) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1) \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^5 (2k-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{3} (5)(2(5)-1)(2(5)+1) = \frac{5}{3} (9)(11) = 165$$

$$\text{Usando Sumas: } 1(2(1)-1)^2 + 1(2(2)-1)^2 + 1(2(3)-1)^2 + 1(2(4)-1)^2 + 1(2(5)-1)^2 = 1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2 (2n^2-1) \rightarrow \text{Ejemplo: } \sum_{k=1}^3 (2k-1)^3 = (3)^2 (2(3)^2-1) = (9)(17) =$$

$$153$$

$$\text{Usando Sumas: } 1(2(1)-1)^3 + 1(2(2)-1)^3 + 1(2(3)-1)^3 = 1 + 27 + 125 = 153$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n-1) \rightarrow \text{Ejemplo 1: } \sum_{k=1}^7 2^k = 2((2)^7-1) = 2(128-1) = 2(127) =$$

$$254$$

$$\text{Usando Sumas: } 1(2)^1 + 1(2)^2 + 1(2)^3 + 1(2)^4 + 1(2)^5 + 1(2)^6 + 1(2)^7 =$$

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 254$$

6: Explique el teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio (TVI) es un resultado fundamental del cálculo que establece que:

Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , y si  $k$  es un valor comprendido entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

7: Explique el teorema fundamental del cálculo.

El teorema fundamental del cálculo es un teorema que relaciona las derivadas con las integrales dando a entender que la derivación y la integración son operaciones inversas.

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x)$$

Segundo teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow o regla de Newton-Leibniz, dice que el valor de una integral definida en un intervalo es igual a la función primitiva evaluada en el extremo de integración superior menos la función primitiva evaluada en el extremo de integración inferior.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



8: Explique el teorema de existencia.

El teorema de existencia y unicidad garantiza que una ecuación tiene una solución bajo ciertas condiciones.

Enunciado del Teorema

Sea la ecuación diferencial de primer orden  $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$

si la función  $F(x, y)$  y su derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial y}$  son continuas en una región al rededor del punto  $(x_0, y_0)$  entonces:

1. Existe al menos una solución  $y(x)$  en un intervalo alrededor de  $x_0$
2. La solución es única en dicho intervalo.

9: Calcular el área bajo la curva de  $y = x^2 + 4$  usando cálculo por la derecha y por la izquierda, cuando  $N = 4$ , en el intervalo de 2 a 4.

• Cálculo por la derecha.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$A_n = \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$f(x_1) = (2.5)^2 + 4 = 6.25 + 4 = 10.25$$

$$A_1 = (0.5)(10.25) = 5.125$$

$$f(x_2) = (3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$A_2 = (0.5)(13) = 6.5$$

$$f(x_3) = (3.5)^2 + 4 = 12.25 + 4 = 16.25$$

$$A_3 = (0.5)(16.25) = 8.125$$

$$f(x_4) = (4)^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

$$A_4 = (0.5)(20) = 10$$

$$AT = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Área aproximada por la derecha = 29.75

$$A = 5.125 + 6.5 + 8.125 + 10 \approx 29.75$$



Calculo por la izquierda.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$A_{in} = \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$f(x_1) = (2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$A_{r1} = (0.5)(8) = 4$$

$$f(x_2) = (2.5)^2 + 4 = 6.25 + 4 = 10.25$$

$$A_{r2} = (0.5)(10.25) = 5.125$$

$$f(x_3) = (3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$A_{r3} = (0.5)(13) = 6.5$$

$$f(x_4) = (3.5)^2 + 4 = 12.25 + 4 = 16.5$$

$$A_{r4} = (0.5)(16.25) = 8.125$$

$$A_T = A_{r1} + A_{r2} + \dots + A_r$$

Area aproximada por la izquierda =

$$A = 4 + 5.125 + 6.5 + 8.125 = 23.75$$

$$A \approx 23.75$$

10. Calcule el area bajo la curva de  $y = x^2 + 4$  usando calculo por la derecha y por la izquierda, cuando  $n=8$ , en el intervalo de 2 a 4

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

• Calculo por la derecha

$$A_{in} = \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$f(x_1) = (2.25)^2 + 4 = 5.0625 + 4 = 9.0625$$

$$A_{r1} = (0.25)(9.0625) = 2.2656$$

$$f(x_2) = (2.5)^2 + 4 = 6.25 + 4 = 10.25$$

$$A_{r2} = (0.25)(10.25) = 2.5625$$

$$f(x_3) = (2.75)^2 + 4 = 7.5625 + 4 = 11.5625$$

$$A_{r3} = (0.25)(11.5625) = 2.8906$$

$$f(x_4) = (3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$A_{r4} = (0.25)(13) = 3.25$$

$$f(x_5) = (3.25)^2 + 4 = 10.5625 + 4 = 14.5625$$

$$A_{r5} = (0.25)(14.5625) = 3.6406$$

$$f(x_6) = (3.5)^2 + 4 = 12.25 + 4 = 16.25$$

$$A_{r6} = (0.25)(16.25) = 4.0625$$

$$f(x_7) = (3.75)^2 + 4 = 14.0625 + 4 = 18.0625$$

$$A_{r7} = (0.25)(18.0625) = 4.5156$$

$$f(x_8) = (4)^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

$$A_{r8} = (0.25)(20) = 5$$

$$A_T = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$A = 2.2656 + 2.5625 + 2.8906 + 3.25 + 3.6406 + 4.0625 + 4.5156 + 5 = 28.1875$$

$A \approx 28.178$  El área aproximada por la derecha es: 28.1875

• Por la izquierda.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$A_{nn} = \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$f(x_1) = (2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$$

$$A_{n1} = (0.5)(8) = 2$$

$$f(x_2) = (2.25)^2 + 4 = 5.0625 + 4 = 9.0625$$

$$A_{n2} = (0.5)(9.0625) = 2.2656$$

$$f(x_3) = (2.5)^2 + 4 = 6.25 + 4 = 10.25$$

$$A_{n3} = (0.5)(10.25) = 2.5625$$

$$f(x_4) = (2.75)^2 + 4 = 7.5625 + 4 = 11.5625$$

$$A_{n4} = (0.5)(11.5625) = 2.8906$$

$$f(x_5) = (3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$A_{n5} = (0.5)(13) = 3.25$$

$$f(x_6) = (3.25)^2 + 4 = 10.5625 + 4 = 14.5625$$

$$A_{n6} = (0.5)(14.5625) = 3.6406$$

$$f(x_7) = (3.5)^2 + 4 = 12.25 + 4 = 16.25$$

$$A_{n7} = (0.5)(16.25) = 4.0625$$

$$f(x_8) = (3.75)^2 + 4 = 14.0625 + 4 = 18.0625$$

$$A_{n8} = (0.5)(18.0625) = 4.5156$$

$$A_T = A_{n1} + A_{n2} + \dots + A_{nn}$$

$$A = 2 + 2.2656 + 2.5625 + 2.8906 + 3.25 + 3.6406 + 4.0625 + 4.5156 = 25.1875$$

$A \approx 25.1875$  El Área aproximada por la izquierda es: 25.1875